Partie III

La Terre, un astre singulier

1 L'histoire de la mesure du méridien terrestre : de Pythéas de Massalia à Eratosthène de Cyrène

Astronome, mathématicien et géographe, Pythéas (~ 380-310 av. J.-C.) qui était originaire de la cité phocéenne de Massalia (Marseille) fut le disciple d'Eudoxe.

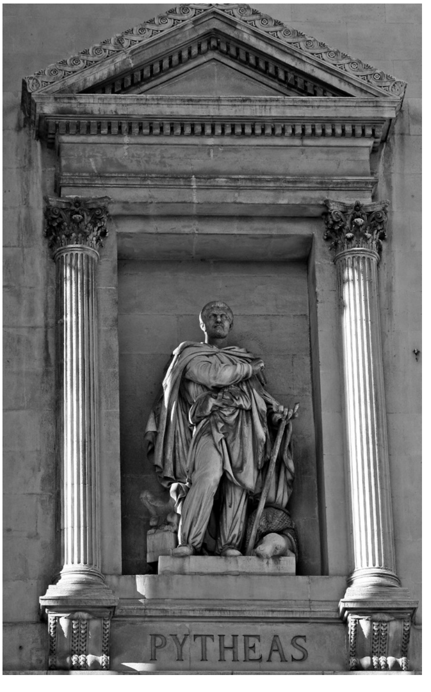

Fig. 1. Statue de Pythéas, Palais de la Bourse à Marseille.

Il est surtout connu pour le grand voyage maritime qu'il entreprit à la découverte des îles Britanniques, de l'île de Thulé (probablement l'Islande) et de la mer Baltique qu'il a décrit dans son livre (aujourd'hui perdu) intitulé *Voyage autour de la Terre* mais dont plusieurs auteurs antiques, principalement le géographe et historien Strabon, nous ont transmis des fragments. Il est considéré comme l'un des plus anciens explorateurs scientifiques et ses découvertes en font le « Christophe Colomb de l'Antiquité Grecque ». Il est également connu pour ses calculs astronomiques d'une grande précision. En effet, en faisant appel à des connaissances mathématiques issues des Écoles ioniennes et pythagoriciennes et en utilisant un simple *gnomon*, il détermina la latitude de Marseille avec une erreur infime, il mesura la valeur de l'obliquité de l'écliptique et fournit, bien avant Ératosthène, un moyen d'obtenir une valeur de la circonférence de la Terre. Il semble que pour déterminer la latitude de Massalia, Pythéas utilisa non pas un gnomon mais un obélisque. Cet obélisque aurait été gradué sur toute sa hauteur, comportant ainsi cent vingt divisions, chacune de ces divisions étant subdivisée en cinq parties. D'après les textes anciens, Pythéas aurait mesuré la hauteur du soleil le jour de l'équinoxe de printemps (21 mars) à midi (heure solaire). Cette mesure qu'on croyait à tout jamais perdue fut retrouvée en 1814 par François de Zach dans un livre intitulé *Eratosthenes Batavus* écrit en 1617 par le mathématicien et physicien néerlandais Willebrord Snell[1]. D'après Snell[2], « le gnomon est avec son ombre, le jour de l'équinoxe de printemps, dans le rapport de cent vingt à cent treize. » Ainsi, en mesurant la longueur de l'ombre portée par son obélisque-gnomon, Pythéas détermina la latitude de Massalia (Marseille) avec une précision d'un dixième de degré.

Question

1. En utilisant la méthode de Pythéas, calculer la latitude de Massalia. Comparer la valeur obtenue avec la valeur actuelle : 43°18'.

1. Hughes Journès, Yvon Georgelin et Jean-Marie Gassend, *Pythéas*, *Explorateur et Astronome*, Les éditions de la Nerthe, 2000.
2. Snell énonça concomitamment à Descartes la loi de la réfraction en Optique.

Réponse

1. Naturellement, à l'époque de Pythéas, il n'était pas question d'exprimer l'inverse d'une tangente pour déduire l'angle recherché. Néanmoins, on peut déduire de la figure 2 ci-dessous, l'expression de la tangente de l'angle α qui représente la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon.

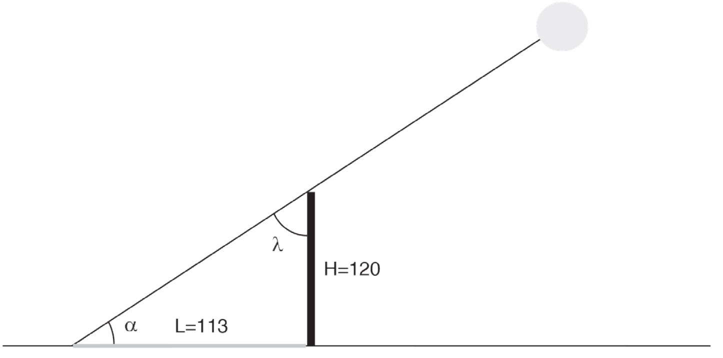

Fig. 2. Mesure de la hauteur du soleil le jour de l'équinoxe de printemps.

À partir de la figure 2 ci-dessus, on déduit que

$$\tan(\alpha) = \frac{H}{L} = \frac{120}{113}$$

Avec l'aide d'une calculatrice scientifique, on obtient la valeur de l'angle α = 46,8° = 46°48'.

Cet angle ne représente pas bien entendu la valeur de la latitude de Massalia. La figure 3, ci-dessous, permet de comprendre pourquoi.

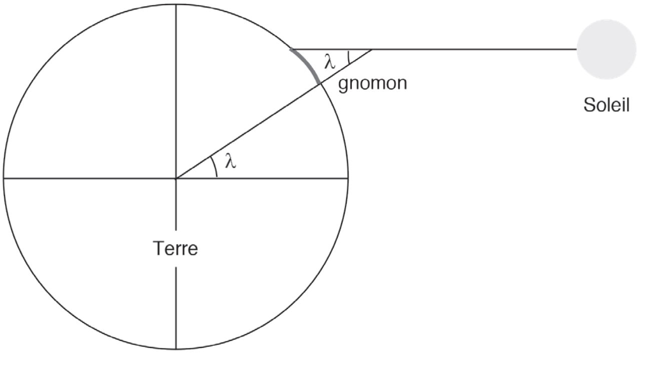

Fig. 3. Détermination de la latitude λ de Massalia le jour de l'équinoxe de printemps.

Ainsi, comme on le remarque sur la figure 3, la latitude de Massalia est donnée par l'angle λ et non par l'angle α. En utilisant le fait que la somme des angles dans un triangle est égale à π radians, c'est-à-dire 180°, on obtient : $\alpha + \lambda + \pi/2 = \pi$. D'où l'on déduit que

$$\boxed{\lambda = 43{,}2° = 43°12'}$$

Considérant qu'un degré représente soixante minutes, un dixième de degré est égal à six minutes. La différence entre la valeur actuelle de la latitude de Massalia et celle calculée par Pythéas est exactement de six minutes d'arc. La précision de la mesure de Pythéas est donc bien d'un dixième de degré.

L'historien Strabon raconte que Pythéas avait en réalité effectué trois mesures de la hauteur du Soleil le jour de l'équinoxe de printemps (21 mars) à midi (heure solaire), le jour du solstice d'été (21 juin) et le jour du solstice d'hiver (21 décembre). Strabon écrit que « le gnomon est avec son ombre, le jour du solstice d'été, dans le rapport de cent vingt à quarante-deux moins un cinquième. » En effectuant la différence entre les mesures de hauteur du Soleil au solstice d'été et à l'équinoxe de printemps, Pythéas détermina avec une grande précision la valeur de l'angle de l'obliquité de l'écliptique.

Question

2. En utilisant la méthode de Pythéas, calculer la valeur de cet angle. Comparer la valeur obtenue avec la valeur actuelle : 23°27'.

Réponse

2.

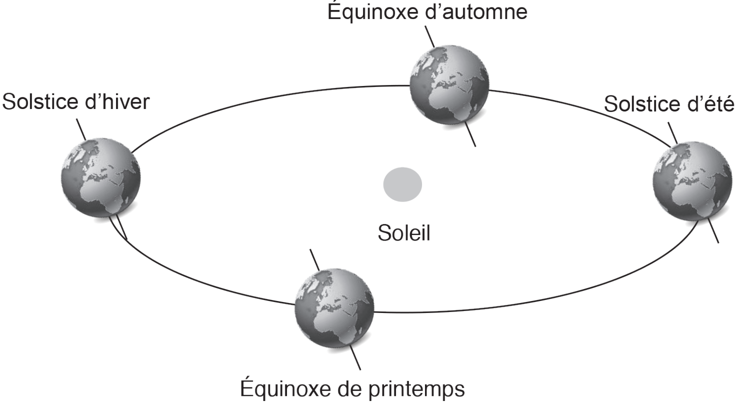

Fig. 4. Obliquité de l'écliptique.

À partir de la figure 4, on remarque que le Soleil culmine à sa position moyenne de 46°8 au-dessus de l'horizon. Le jour du solstice d'été il s'élève d'un angle β qui est défini par

$$\tan(\beta) = \frac{120}{41{,}8}$$

Avec l'aide d'une calculatrice scientifique, on obtient la valeur de l'angle $\beta = 70{,}8° = 70{,}48'$. En faisant la différence entre ces deux angles, Pythéas obtint la valeur de l'obliquité de l'écliptique, soit

$$\boxed{\delta = \beta - \alpha = 70{,}8 - 46{,}8 \approx 24°}$$

En réalité, son calcul fut bien plus précis que l'approximation qui est présentée ici. Nous renvoyons le lecteur intéressé vers l'ouvrage de Hughes Journès, Yvon Georgelin et Jean-Marie Gassend[1] pour plus de détails. Ces auteurs montrent que Pythéas avait amélioré la valeur de cet angle qui avait été initialement proposée par Anaximandre (disciple de Thalès) comme étant égale à 1/15 de la circonférence, soit 24°. Par un procédé remarquable, Pythéas aurait fourni la valeur de 11/166 de la circonférence, soit un angle de 23°51'. Considérant comme précédemment qu'un degré représente soixante minutes, un dixième de degré est égal à six minutes. La différence entre la valeur actuelle de l'obliquité de l'écliptique et celle calculée par Pythéas est environ de douze minutes d'arc. La précision de la mesure de Pythéas est donc de deux dixième de degré.

À la page 198 de *La Géographie de Strabon*[2] il est écrit « qu'à 9 100 stades* de Marseille, il [le Soleil] s'élève seulement de quatre coudées. » La note de bas de page (*) indique :

« Lisez *environ 10 500 stades*, au lieu de 9 100 que porte le texte. L'indication astronomique donne pour latitude à-peu-près 58° ; et l'on verra, dans la suite, la durée du jour solsticial fixe les lieux dont il est question à 57° 58' 44". »

Dans une note de bas de page précédente de ce même ouvrage, il est écrit que :

« La coudée astronomique des anciens était de deux degrés. »

1. *Ibid.*
2. Ce texte est disponible sur le site de la *Bibliothèque Nationale de France* (Gallica) à l'adresse suivante : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6522994r/f350.item.r=strabon%20g%C3%A9ographie

Question

3. En utilisant ces données ainsi que les résultats précédents, en déduire la mesure de l'arc méridien terrestre en stades. En prenant ensuite 157,5 mètres pour la valeur d'un stade comparer le résultat de Pythéas à la valeur actuelle : 6 371 km (On verra plus loin que la valeur de ce rayon est différente selon qu'on la mesure aux pôles ou à l'équateur.).

Réponse

3. La figure 5 présentée ci-dessous permet d'illustrer la démonstration. Un premier gnomon a été planté verticalement dans le sol à Marseille (M) et permet de calculer sa latitude $\beta \approx 43°$. Un second a été planté au Cap Orcas (au nord de l'Écosse jusqu'où aurait navigué Pythéas) et aurait permis de calculer la latitude de ce lieu $\alpha \approx 58°$. En utilisant les relations dans le triangle rectangle, il est facile de démontrer que $\delta = \alpha - \beta \approx 15°$.

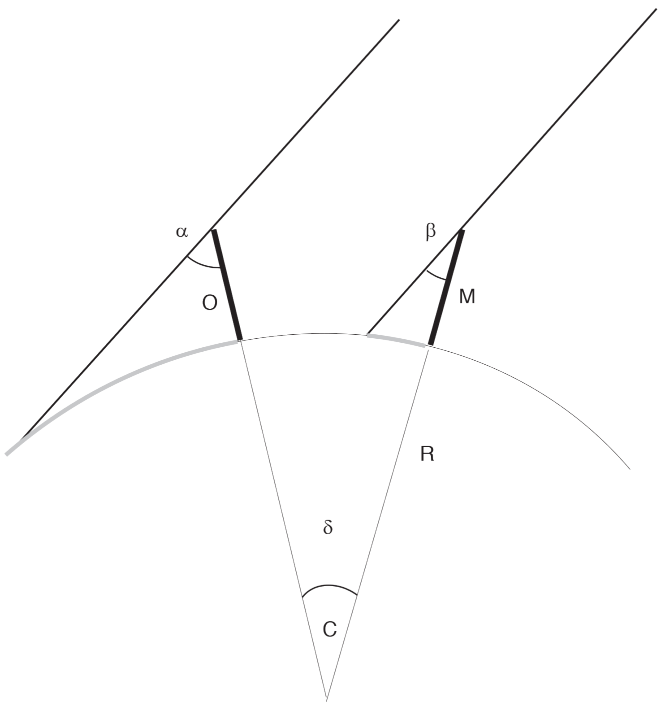

Fig. 5. Mesure de l'arc méridien terrestre.

Or, d'après Strabon la distance de Marseille à Cap Orcas était d'environ 10 500 stades (après correction). Une simple « règle de trois » permet d'écrire que si un angle de 15° représente un arc de longueur 10 500 stades, le méridien terrestre à une valeur 24 fois plus grande puisque $24 \times 15° = 360°$.

Le méridien terrestre a donc pour valeur $24 \times 10\,500 = 252\,000$ stades. Il est intéressant pour la suite d'exprimer également la valeur du degré par rapport au nombre de stades. On a d'après Strabon 15° pour 10 500 stades, soit :

$$\boxed{1° \rightarrow 700 \text{ stades}}$$

En considérant qu'un stade est égal à environ 157,5 mètres, la valeur du méridien terrestre obtenue par Pythéas est égale à 39 690 km. Ce qui conduit à un rayon terrestre égal à 6 317 km. La valeur actuelle étant de 6 371 km cela correspond à une erreur de moins de 1 % (0,8 %).

Eratosthène (276-194 av. J.-C.) était un astronome, géographe, mathématicien et philosophe grec originaire de Cyrène, aujourd'hui Shahhat en Libye. Il fut appelé en Égypte par Ptolémée III qui lui confia la direction de la Bibliothèque d'Alexandrie. En géographie, il fut une autorité reconnue de toute l'Antiquité. Il eut l'idée de diviser le globe au moyen d'un axe Est-Ouest parallèle à l'équateur passant par Rhodes et d'un axe Nord-Sud perpendiculaire au premier et passant par Alexandrie.

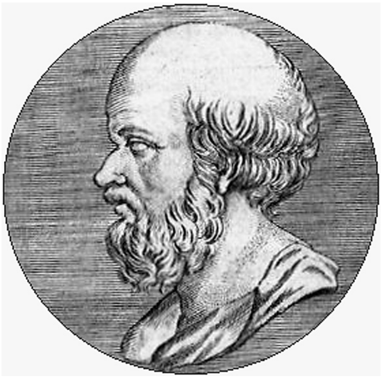

Fig. 6. Eratosthène de Cyrène.

Ainsi tous les lieux connus se situaient par rapport à un parallèle et un méridien de référence. Il mesura aussi l'obliquité de l'écliptique mais avec une erreur de seulement 7 minutes d'arc et constitua un catalogue (aujourd'hui perdu) de 675 étoiles. Mais surtout, il proposa une méthode similaire à celle précédemment utilisée par Pythéas de Massalia pour mesurer la circonférence de la Terre. Ses calculs étaient fondés sur l'observation qu'à midi, au moment du solstice d'été, le Soleil à Syène (aujourd'hui Assouan) se trouve à la verticale car il ne donne aucune ombre (Syène se situe presque directement sur le tropique du Cancer). À Alexandrie, se servant de l'ombre projetée par un