Sujet n° 14

CCP 2018 – Maths

L'énoncé

PROBLÈME 1

Ce problème comporte 3 parties indépendantes.

Notations et définitions

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.
- Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $[\![n_1, n_2]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2.

Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = 0$. La **partie I** est une partie d'algèbre qui traite des solutions polynomiales de cette équation lorsque a et b sont des constantes réelles. Dans la **partie II**, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation lorsque a et b sont des constantes réelles. La **partie III** traite des solutions de cette équation lorsque $a = 1$ et b est la fonction carré.

Partie I - Endomorphismes

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

Q1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall\ P \in \mathbb{R}[X]\ ,\ \Delta(P) = XP'$.
Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $\Delta(X^k)$.

Q2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta\circ(\Delta-\mathrm{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}[X]$.

Q3. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.

Q4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q5. On définit l'application Φ par :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = X^2P'' + aXP'.$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q6. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q7. Montrer que Φ_n est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP.$$

Q8. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n. Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

Q9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

Q10. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 appartenant à $[\![0, n]\!]$.

Q11. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière m appartenant à $[\![0, n]\!]$.

Q12. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Partie II - Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2y'' + axy' + by = 0,$$

(2)

où a et b sont des constantes réelles.

Q13. Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?

Q14. Montrer que si y est une solution de (2) sur I, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0. \tag{3}$$

Q15. Réciproquement, soit $t \longmapsto g(t)$ une solution de (3) sur $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (2) sur I.

Q16. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle I.

On suppose *dans les deux questions suivantes uniquement* que $a = 1$ et $b = -4$.

Q17. Montrer que si y est solution de (2) sur l'intervalle J, alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur $\mathbb{R}$ entier.

Q18. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Partie III - Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \tag{4}$$

Q19. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (4).

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $]-R, R[$.

Q20. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} & = & 0 \\ c_{2k} & = & \dfrac{(-1)^k}{4^k\ (k!)^2}. \end{cases}$$

Q21. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$.

Q22. Soient $r > 0$ et f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$.

L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1.$$

Q23. Montrer que si $\sum_{k \geqslant 0} \beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \beta_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} & = & 0. \end{array} \right. \tag{5}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

Q24. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_k| \leqslant \frac{M}{r^k}.$$

Q25. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

Q26. Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\sum_{k \geqslant 0} \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (4)

Q27. Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$.
Montrer que la fonction $y : x \mapsto \lambda(x) J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto x J_0^2(x) \lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

Q28. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

Q29. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x)\ \ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

Q30. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.

PROBLÈME 2

Notations et définitions

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbf{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $[-1, 1]$.
On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, ($\mathbf{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q31. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

Q32. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

Q33. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:
$$\mathbf{P}\Big(|X| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left(|X|\right)}{\alpha}.$$

Q34. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\left(\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)\right)^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)$.

Q35. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$
Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geqslant 0$.

Q36. En déduire que pour tout $t > 0$, et pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :
$$e^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

Q37. En déduire que pour tout $t > 0$:
$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leqslant \operatorname{ch} t.$$

Q38. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que, pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leqslant e^{t^2/2}.$$

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q39. Montrer que la fonction :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$$

atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q40. En déduire que $\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$, puis que

$$\mathbf{P}\left(|S_n| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Conclusion

Q41. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbf{P}\left(|S_n| > \varepsilon\right)$ converge.

Q42. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geqslant n} \left\{\omega \in \Omega\ ;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\right\}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement et que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0.$$

Q43. Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\ ;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement.
Écrire l'ensemble $A = \left\{\omega \in \Omega\,;\ \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0\right\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que A est un événement.

Q44. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$

FIN

Le corrigé commenté

PROBLÈME 1

Partie I - Endomorphismes

Q1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}[X]\ ,\ \Delta(P) = XP'.$$

On demande dans cette question de calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\Delta(X^k).$$

- Si $k = 0$, $\Delta(X^0) = X \times 0 = 0 = 0X^0$.
- Si $k \in [\![1, n]\!]$, $\Delta(X^k) = XkX^{k-1} = kX^k$.
- En conclusion, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\Delta(X^k) = kX^k.$$

Commentaires

À propos de cette question **Q1**, il est signalé dans le rapport du jury que peu de candidats ont étudié spécifiquement le cas $k = 0$.

Q2. Montrons que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta\circ(\Delta-\mathrm{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}[X]$.
Posons donc $P \in \mathbb{R}[X]$. On part de $\Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P)$ que l'on développe :

$$\Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P) = \Delta(XP' - P) = X(P' + XP'' - P') = X^2P''.$$

On a appliqué la formule de dérivation du produit de deux polynômes.

Q3. Montrons ici que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors son polynôme dérivé P' appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $XP' \in \mathbb{R}_n[X]$, car produit d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme de degré au plus $n - 1$. Ainsi :

$$\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X].$$

Commentaires

À CCINP, les premières questions sont faciles pour limiter les très mauvaises copies. D'ailleurs, le rapport du jury fait remarquer que le **problème 1** a été plus abordé que le second et la première partie de ce **problème 1** a été en particulier mieux réussie que la suite.

Q4. On notera maintenant Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.
Il s'agit ici de déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
On use de la question **Q1**. En effet, on compléte les colonnes de la matrice avec les coordonnées, pour $k \in [\![0, n]\!]$, de $\Delta(X^k)$ sur la base canonique.
On obtient une matrice diagonale (dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Commentaires

À propos de cette question **Q4**, il est signalé dans le rapport du jury que l'on voit parfois des matrices avec des coefficients polynomiaux montrant la difficulté pour certains candidats de travailler avec un espace vectoriel de polynômes.
Rappelons au passage qu'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est de degré inférieur ou égal à n et non de degré exactement n.

Q5. On définit dans la suite l'application Φ par :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = X^2P'' + aXP'.$$

Première partie

Montrons que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$.
Pour cela, posons $P \in \mathbb{R}[X]$. On commence par utiliser le résultat de la question **Q2** :

$$(\Delta^2 - \Delta)(P) = X^2P''.$$

Puis on remarque que pour tout réel a,

$$(\Delta^2 + (a-1)\Delta)(P) = (\Delta^2 - \Delta)(P) + a\Delta(P).$$

Ce qui donne :

$$(\Delta^2 + (a-1)\Delta)(P) = X^2P'' + aXP' = \Phi(P),$$

car $\Delta(P) = XP'$.
On peut conclure :

$$\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta.$$

Deuxième partie

Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ donc Δ^2 aussi car la composition et le passage aux combinaisons linéaires conservent la linératité et on peut conclure :

$$\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].$$

Q6. Montrons que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
Il suffit d'affiner le raisonnement que l'on vient de faire. Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta_n(P) = \Delta(P)$.
Donc comme $\Delta_n^2(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ puis toute combinaison linéaire de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, Φ induit bien un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.