Chapitre

1

Raisonnements

1. Raisonnements par récurrence

Exercice 1.1

■□□ *Objectif : somme des carrés des impairs.*

Montrer que la somme des carrés des n-ers impairs vaut $\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

Exercice 1.2

■□□ *Objectif : manipulation de multi-indices.*

Montrer par récurrence que :

$$\forall k \geq 1,\ \forall n \geq 1,\ \sum_{i=1}^{n} \frac{(i+k)!}{(i-1)!} = \frac{(n+k+1)!}{(k+2)(n-1)!}$$

Exercice 1.3

■□□ *Objectif : on ne vient pas de le faire ?*

Montrer par récurrence que :

$$\forall k \geq 1,\ \forall n \geq 1,\ \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)!}{(i+k)!} = \frac{1}{k \cdot k!} - \frac{n!}{k(n+k)!}$$

Exercice 1.4

■□□ *Objectif : quand on n'a pas le terme général, on....*

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big) u_n$$

Déterminer le terme général u_n pour tout n.

Exercice 1.5

■□□ *Objectif : quand on n'a pas le terme général, on ...*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{b}{(n+1)(n+2)} u_n$$

Déterminer le terme général u_n.

Exercice 1.6

■■□ *Objectif : récurrence triple, rien que ça !*

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 10$, $u_1 = 5$, $u_2 = 49$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+3} - 23u_{n+2} + 40u_{n+1} + 16u_n = 0$$

Montrer qu'alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)4^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$.

Exercice 1.7

■■□ *Objectif : encadrement d'un coefficient binomial.*

Montrer que :

$$\forall n \geq 5,\ 3^n < \binom{2n}{n} < 4^n$$

Exercice 1.8

■■□ *Objectif : forme de la dérivée n-ème de $x \mapsto e^{-x^2}$.*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$. On notera $f^{(n)}$ la dérivée n-ème de f (avec $f^{(0)} = f$).

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(1)}(x) + 2xf(x) = 0$$

puis par récurrence, que, pour tout $n \geq 2$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) + 2xf^{(n-1)}(x) + 2(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = e^{-x^2} H_n(x)$$

où H_n est un polynôme de degré n et dont le coefficient dominant est $(-2)^n$.

Exercice 1.9

■■□ *Objectif : décomposition d'entiers naturels.*

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \in \mathbb{N},\ \exists q \in \mathbb{N},\ n = 2^k(2q+1)$$

---

2. D'autres types de raisonnements

Exercice 2.1

□□□ *Objectif : raisonnement par contraposée.*

Montrer que si n^2 (où $n \in \mathbb{N}$) est impair alors n est pair.

Exercice 2.2

■□□ *Objectif : raisonnement par l'absurde.*

Montrer qu'il n'existe pas de triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = ax^2 + bx + c$$

Exercice 2.3

■□□ *Objectif : raisonnement par analyse-synthèse.*

Montrer que toute fonction réelle est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire et, ce, de manière unique.

Exercice 2.4

■□□ *Objectif : et le perdant est....*

Justifier que la phrase :

« tout entier positif est somme de trois carrés »

est fausse.

Exercice 2.5

■□□ *Objectif : raisonnement par l'absurde.*

Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 2.6

■□□ *Objectif : raisonnement par disjonction de cas.*

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, les entiers $n(7n+1)$ et 3^n+1 sont toujours pairs.

Corrigés des exercices

Exercice 1.1

Établissons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

Pour $n = 1$, on a d'une part $1^2 = 1$ et d'autre part $\dfrac{1 \times 3}{3} = 1$ donc on a bien l'égalité.
Supposons l'égalité vraie à l'ordre n fixé dans $\mathbb{N}^*$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\ &\underset{HR}{=} \frac{n(4n^2-1)}{3} + (2n+1)^2 \\ &= \frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}\end{aligned}$$

Inutile de penser à une astuce particulière, il nous suffit de partir du résultat à trouver et de le développer.
On a :

$$\frac{(4(n+1)^2-1)(n+1)}{3} = \frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$$

On a bien l'ordre $n+1$ et ainsi la récurrence est achevée et le résultat est vrai pour tout $n \geq 1$.

Exercice 1.2

Pour $n = 1$, on a d'une part $(k+1)!$ et d'autre part

$$\frac{(k+2)!}{(k+2)} = (k+1)!$$

d'où l'égalité.
Supposons la formule vraie pour un certain n fixé dans $\mathbb{N}^*$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}\frac{(i+k)!}{(i-1)!} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(i+k)!}{(i-1)!}+\frac{(k+n+1)!}{n!}\\
&= \frac{(n+k+1)!}{(k+2)(n-1)!}+\frac{(k+n+1)!}{n!}\\
&= \frac{(n+k+1)!(n+k+2)}{(k+2)n!}=\frac{(n+k+2)!}{(k+2)n!}
\end{aligned}$$

D'où l'ordre $n+1$ est la fin de la récurrence.

Exercice 1.3

Pour $n=1$, on a d'une part $\dfrac{1}{(k+1)!}$ et d'autre part
$\dfrac{1}{kk!}-\dfrac{1}{(k+1)!}=\dfrac{k+1-1}{k(k+1)!}=\dfrac{1}{(k+1)!}$. D'où l'égalité.
Supposons la formule vraie à l'ordre n fixé dans $\mathbb{N}^*$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}\frac{(i-1)!}{(i+k)!} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)!}{(i+k)!}+\frac{n!}{(n+k+1)!}\\
&= \frac{1}{kk!}-\frac{n!}{k(n+k)!}+\frac{n!}{(n+k+1)!}\\
&= \frac{1}{kk!}-\frac{n!(n+k+1-k)}{k(n+k+1)!}\\
&= \frac{1}{kk!}-\frac{(n+1)!}{k(n+k+1)!}
\end{aligned}$$

L'ordre $n+1$ est bien validé et la récurrence est établie.

Exercice 1.4

On n'a pas le terme général, donc on calcule les premières valeurs pour espérer pouvoir conjecturer sur celui-ci.
On trouve que : $u_1=2$, $u_2=3$, $u_3=4$.
Ainsi, on conjecture que $u_n=n+1$.
Montrons-le à présent par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.
Pour $n=0$, on l'a par définition.