Chapitre 1.
Espaces vectoriels

Nous allons revoir la notion d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels : n'hésitez pas à relire le chapitre 15 du tome 1 de *Prépa-maths*. Nous avions alors travaillé surtout sur des espaces de matrices. Nous allons maintenant découvrir de nouveaux ensembles sous cette nomenclature d'espaces vectoriels.

I Espaces et sous-espaces vectoriels

I.1 Définitions

Définition 1 : On appelle $\mathbb{R}$-espace vectoriel (en abrégé $\mathbb{R}$-ev) tout ensemble E muni de deux opérations : une addition qui à tout couple (u, v) d'éléments de E associe $u + v$ élément de E et une multiplication par un réel qui à tout couple (λ, u) d'un réel et d'un élément de E associe $\lambda \times u$ (ou λu) élément de E telles que pour tous u, v, w éléments de E et pour tous λ, μ réels

a) $u + v = v + u$ b) $u + (v + w) = (u + v) + w$

c) il existe un vecteur nul 0_E vérifiant : $\forall u \in E,\ \ u + 0_E = 0_E + u = u$.

d) il existe pour chaque $u \in E$, un élément appelé symétrique ou opposé de u noté $-u$ et vérifiant $u + (-u) = (-u) + u = 0_E$.

e) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ f) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

g) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ h) $1 \times u = u$

Les éléments u de E sont appelés des vecteurs et les réels λ des scalaires.

Définition 2 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $F \subset E$.
F est un sous-espace vectoriel (en abrégé ss-ev) de E lorsque $0_E \in F$ et F est stable par l'addition et la multiplication par un réel.
C'est-à-dire $0_E \in F$ et pour tous u et v éléments de F et pour tout λ réel, $u + v \in F$ et $\lambda u \in F$ (ou de façon équivalente $u + \lambda v \in F$).

I.2 Exemples de référence

a) $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev. En effet il est muni d'une addition et d'une multiplication entre réels vérifiant toutes les conditions de la définition. Son vecteur nul est le zéro réel 0 et l'opposé de x réel est $-x$.

b) Soit n un entier naturel non nul et $E_1, E_2, \dots, E_n$ des $\mathbb{R}$-ev.
Alors leur produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, ensemble qui regroupe tous les n-uplets $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ avec $u_1 \in E_1$, $u_2 \in E_2$, … , $u_n \in E_n$, est un $\mathbb{R}$-ev avec les opérations suivantes : on définit, pour tout λ réel, pour tout $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ et pour tout $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, l'addition par

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

et la multiplication par un réel par $\lambda(u_1, u_2, \dots, u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n)$.
En particulier $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ encore noté $\mathbb{R}^n$, ensemble de tous les n-uplets de réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, est un $\mathbb{R}$-ev.
Son vecteur nul est $(0,0, \dots, 0)$ et l'opposé de $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

c) Soit D une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble $E = \mathbb{R}^D$ des applications définies sur D et à valeurs réelles est un $\mathbb{R}$-ev. Son vecteur nul est l'application constante égale à 0 notée f_0 et l'opposé de f appartenant à E est l'application $-f$.
En particulier l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vues comme des applications définies sur $D = \mathbb{N}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

d) Soit n et p deux entiers non nuls. L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev. De plus la matrice nulle dont tous les coefficients sont nuls notée $0_{n,p}$ est le vecteur nul et la matrice $-A$ est l'opposé de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus n et du polynôme nul, et $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble de tous les polynômes, sont des $\mathbb{R}$-ev.
Leur vecteur nul est le polynôme nul (par convention de degré $-\infty$) et l'opposé du polynôme P est $-P$.

Exemple 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dans chacun des cas suivants.
a- F est le sous-ensemble des applications dérivables sur $\mathbb{R}$ dans E espace vectoriel des applications définies sur $\mathbb{R}$.
b- $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}[X]$ espace vectoriel des polynômes.
c- F est le sous-ensemble des suites convergentes dans E espace vectoriel des suites réelles.

a- L'application constante nulle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc le vecteur nul de E appartient bien à F.
Soit f et g deux applications de F et λ un réel. En particulier f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $f + \lambda g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme, c'est-à-dire $f + \lambda g$ appartient aussi à F.
Au final F est un ss-ev de E.

b- Le polynôme constant nul associe l'image 0 à 0 donc le vecteur nul de E appartient bien à F.

Soit P et Q deux polynômes de F et λ un réel. En particulier $P(0) = 0$ et $Q(0) = 0$. On obtient $(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0$. Donc $P + \lambda Q \in F$.
Au final F est un ss-ev de E.

c- La suite constante nulle converge vers 0 donc le vecteur nul de E appartient bien à F.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de F et λ un réel. En particulier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel m. D'où par limite d'un produit et d'une somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lambda v_n = l + \lambda m$ et $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une suite convergente de F.
Au final F est un ss-ev de E.

I.3 Sous-espaces vectoriels engendrés

Définition 3 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev, $u_1, u_2, \dots, u_n$ n vecteurs de E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n scalaires.
Le vecteur $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$.
On note $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ le sous-ensemble de E qui regroupe toutes les combinaisons linéaires possibles des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Remarque : En particulier pour $n = 1$, une combinaison linéaire de u_1 est un vecteur de la forme λu_1 avec λ scalaire et $\mathrm{Vect}(u_1)$ est le sous-ensemble de tous les vecteurs λu_1 avec λ scalaire quelconque.
De la même façon, pour $n = 2$, une combinaison linéaire de u_1, u_2 est un vecteur de la forme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ avec λ_1, λ_2 scalaires et $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ est le sous-ensemble de tous les vecteurs $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ avec λ_1, λ_2 scalaires quelconques.

Propriété 1 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $u_1, u_2, \dots, u_n$ n vecteurs de E
Alors $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.
Il est appelé sous-espace vectoriel engendré par $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Exemple 2 : Montrer que les sous-ensembles F sont des ss-ev de E dans chaque cas suivant en les écrivant sous la forme d'un ss-ev engendré.
a- E est le $\mathbb{R}$-ev des suites réelles et F est le sous-ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$.
b- $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \,, \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$.

a- Les suites appartenant à F sont toutes les suites récurrentes du second ordre d'équation caractéristique $x^2 + x - 6 = 0$. Cette équation admet deux racines 2 et -3. Ainsi

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F &\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2(-3)^n \\ &\Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}})\end{aligned}$$

D'où $F = \mathrm{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ et F est un ss-ev de E.

b- Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ avec a, b, c réels.

$$P \in F \Leftrightarrow \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 at^2 + bt + c\ \mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + ct\right]_0^1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2} \Leftrightarrow P = aX^2 + bX - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = a\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) + b\left(X - \frac{1}{2}\right)$$
D'où $F = \mathrm{Vect}\left(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2}\right)$ et F est un ss-ev de E.

II Famille de vecteurs

Dans toute cette partie, on considère E un $\mathbb{R}$-ev et F un ss-ev de E.

II.1 Famille génératrice

Définition 4 : Soit $e_1, e_2, \dots, e_n$ n vecteurs de E et $u_1, u_2, \dots, u_p$ p vecteurs de E.
La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est dite génératrice de E lorsque $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
La famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est dite génératrice de F lorsque $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Exemple 3 : On reprend l'exemple 2.
a- La famille $((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est génératrice de F.
b- La famille $\left(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2}\right)$ est génératrice de F.

Exemples de référence : a) La famille (1) constituée du seul réel 1 est une famille génératrice de $\mathbb{R}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On construit dans $\mathbb{R}^n$ les n-uplets suivants :
$$e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0), e_3 = (0,0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,\dots,0,1)$$
Ces n n-uplets constituent une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. La famille des $n \times p$ matrices élémentaires $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On rappelle que E_{ij} est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficient sont nuls sauf celui situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne qui vaut 1.

d) La famille des $(n+1)$ polynômes $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ où X^k représente l'application polynomiale qui à tout x réel associe x^k pour $k \in \mathbb{N}$. La famille de tous les polynômes X^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

Remarque : Les familles génératrices ne sont pas uniques. En effet soit (e_1, e_2) une famille génératrice de E : ainsi $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et tout vecteur u de E s'écrit donc comme combinaison linéaire de e_1, e_2, c'est-à-dire $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ avec λ_1 et λ_2 scalaires. Mais on peut encore écrire $u = \frac{\lambda_1}{2}(2e_1) + \frac{\lambda_2}{3}(3e_2)$: d'où $E \subset \mathrm{Vect}(2e_1, 3e_2)$. Or comme on a

immédiatement $\mathrm{Vect}(2e_1, 3e_2) \subset E$, au final $E = \mathrm{Vect}(2e_1, 3e_2)$ et $(2e_1, 3e_2)$ est une autre famille génératrice de E. Plus généralement si une famille est génératrice, alors la famille composée des mêmes vecteurs multipliés par des scalaires non nuls est encore génératrice.
Cette remarque est aussi valable pour les familles génératrices de F.

II.2 Famille libre

Définition 5 : Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ n vecteurs de E.
La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est dite libre lorsque pour tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ on vérifie l'implication :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0$$

Sinon la famille est dite liée.

Remarques : 1/ Une famille liée vérifie la négation de cette définition : c'est-à-dire il existe n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$ et tels qu'il existe au moins un $k \in [\![1, n]\!]$ pour lequel $\lambda_k \neq 0$.
2/ Soit u un vecteur de E.
La famille constituée du seul vecteur (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
Attention ceci n'est valable que pour les familles constituées d'un seul vecteur.
3/ Soit u et v deux vecteurs de E.
La famille $(u, v, 0_E)$ est liée car on a $0 \times u + 0 \times v + 2 \times 0_E = 0_E$. Plus généralement si une famille compte le vecteur nul parmi ses vecteurs, elle est liée.
De même la famille (u, v, u) est liée car $1 \times u + 0 \times v + (-1) \times u = 0_E$. En effet si une famille comporte deux fois le même vecteur, elle sera liée.
Enfin la famille $(u, v, 2u + 3v)$ est liée car $(-2) \times u + (-3) \times v + (2u + 3v) = 0_E$. Si une famille comporte un vecteur qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs de cette famille, elle sera aussi liée.

Exemple 4 : Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées.
a- $((1,1,2), (2,1,1), (-1,0,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
b- $(f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x, f_2 : x \mapsto x\mathrm{e}^x)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
c- $(X + 1, 2X^2 - X, X^3 - 3X + 2)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

a- Soit trois scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On résout :
$\lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(2,1,1) + \lambda_3(-1,0,1) = (0,0,0)$
$\Leftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & -\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \; L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & -\lambda_3 \\ \lambda_2 & = & \lambda_3 \end{cases}$$

En particulier $-(1,1,2) + (2,1,1) + (-1,0,1) = (0,0,0)$
Donc $((1,1,2), (2,1,1), (-1,0,1))$ est une famille liée.

b- Soit deux scalaires λ_1, λ_2. On résout $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 \mathrm{e}^x + \lambda_2 x \mathrm{e}^x = 0$$

En particulier pour $x = 0$, on obtient $\lambda_1 = 0$.
Ensuite pour $x = 1$, on doit vérifier $\lambda_1 \mathrm{e} + \lambda_2 \mathrm{e} = 0$. Comme on a déjà $\lambda_1 = 0$, on obtient $\lambda_2 \mathrm{e} = 0$, d'où $\lambda_2 = 0$
Donc $(f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x, f_2 : x \mapsto x\mathrm{e}^x)$ est une famille libre.

c- Soit trois scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On obtient par identification des coefficients :
$\lambda_1(X + 1) + \lambda_2(2X^2 - X) + \lambda_3(X^3 - 3X + 2) = 0$
$\Leftrightarrow \lambda_3 X^3 + 2\lambda_2 X^2 + X(\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3) + \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

Donc $(X + 1, 2X^2 - X, X^3 - 3X + 2)$ est une famille libre.

II.3 Base

Définition 6 : Une base de E est une famille libre et génératrice de E.
Une base de F est une famille libre et génératrice de F.

Exemple 5 : Montrer que les sous-ensembles suivants sont des ss-ev de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de chacun d'eux.

a- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + 2y + 3z = 0\}$
b- $G = \{(a + b + c, a - b + 3c, 4a + 8c) \in \mathbb{R}^3, a, b, c \text{ réels}\}$

a- $(x, y, z) \in F \Leftrightarrow -x + 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 3z \Leftrightarrow (x, y, z) = (2y + 3z, y, z)$
$\Leftrightarrow (x, y, z) = y(2,1,0) + z(3,0,1)$
Donc $F = \mathrm{Vect}((2,1,0), (3,0,1))$.
En particulier F est un ss-ev de $\mathbb{R}^3$ et $((2,1,0), (3,0,1))$ est une famille génératrice de F.
Ensuite soit deux scalaires λ_1, λ_2. On résout :
$\lambda_1(2,1,0) + \lambda_2(3,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow (2\lambda_1 + 3\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Donc $((2,1,0), (3,0,1))$ est une famille libre. Au final il s'agit d'une base de F.

b- $(a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) \in G$
$\Leftrightarrow (a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) = a(1,1,4) + b(1,-1,0) + c(1,3,8)$
Donc $G = \mathrm{Vect}((1,1,4),(1,-1,0),(1,3,8))$. En particulier G est un ss-ev de $\mathbb{R}^3$ et $((1,1,4),(1,-1,0),(1,3,8))$ est une famille génératrice de G.
Maintenant soit trois scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On résout :
$\lambda_1(1,1,4) + \lambda_2(1,-1,0) + \lambda_3(1,3,8) = (0,0,0)$
$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3, 4\lambda_1 + 8\lambda_3) = (0,0,0)$

C'est-à-dire $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}$$

Ici on obtient par exemple pour $\lambda_3 = 1$: $-2(1,1,4) + (1,-1,0) + (1,3,8) = (0,0,0)$.
La famille $((1,1,4),(1,-1,0),(1,3,8))$ est donc liée. Ce n'est pas une base de G.
Pour déterminer néanmoins une base de G, on va écarter certains vecteurs tout en gardant le caractère famille génératrice mais en essayant de tomber sur une famille libre. Pour ce faire, on va s'appuyer sur la combinaison linéaire qui nous a permis de conclure que la famille est liée.
On a montré que : $-2(1,1,4) + (1,-1,0) + (1,3,8) = (0,0,0)$.
On en déduit en particulier que $(1,3,8) = 2(1,1,4) - (1,-1,0)$.
Nous allons alors essayer la famille $((1,1,4),(1,-1,0))$ comme base pour G.
On a d'abord :
$(a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) \in G$
$\Leftrightarrow (a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) = a(1,1,4) + b(1,-1,0) + c(1,3,8)$
$\Leftrightarrow (a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) = a(1,1,4) + b(1,-1,0) + c(2(1,1,4) - (1,-1,0))$
$\Leftrightarrow (a+b+c, a-b+3c, 4a+8c) = (a+2c)(1,1,4) + (b-c)(1,-1,0)$
Cette dernière relation nous permet seulement de dire que $G \subset \mathrm{Vect}((1,1,4),(1,-1,0))$: en effet, attention ici on ne reconnait pas forcément toutes les combinaisons linéaires possibles des vecteurs $(1,1,4),(1,-1,0)$ à cause des coefficients $a+2c$ et $b-c$. Or comme dans ce cas on a $G = \mathrm{Vect}((1,1,4),(1,-1,0),(1,3,8))$, on a aussi $\mathrm{Vect}((1,1,4),(1,-1,0)) \subset G$.
Donc $G = \mathrm{Vect}((1,1,4),(1,-1,0))$ et $((1,1,4),(1,-1,0))$ est encore une famille génératrice de G.
Ensuite soit deux scalaires λ_1, λ_2.

$$\lambda_1(1,1,4) + \lambda_2(1,-1,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Donc $((1,1,4),(1,-1,0))$ est une famille libre. Au final il s'agit d'une base de G.

Propriété 2 : Soit $e_1, e_2, \dots, e_n$ n vecteurs de E.
$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si pour tout $u \in E$, il existe n uniques scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$.
Dans ce cas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont appelés les coordonnées de u dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Exemples de référence : a) La famille (1) est constituée d'un seul vecteur non nul, donc elle est libre. Il s'agit d'une base de $\mathbb{R}$. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}$.
Un réel x a pour coordonnées lui-même x dans cette base.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les n n-uplets suivants constituent une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0), e_3 = (0,0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,\dots,0,1)$$

Ils forment immédiatement une famille libre : il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^n$. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a pour coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans cette base canonique.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On a vu que la famille des $n \times p$ matrices élémentaires $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On montre aisément qu'elle est libre : il s'agit donc d'une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On l'appelle la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ a pour coordonnées ses coefficients a_{ij} dans cette base.

d) De même, on a vu que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ $n+1$ scalaires. On obtient par identification des coefficients :

$$\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \dots + \lambda_n X^n = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Ainsi $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est aussi une famille libre. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
De même la famille de tous les polynômes X^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
Un polynôme $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$ a pour coordonnées ses coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

III Dimension

Dans toute cette partie, on considère E un $\mathbb{R}$-ev et F un ss-ev de E. Nous allons définir un nouvel outil, la dimension, qui sera redoutablement efficace pour étudier nos ev. Sa théorie repose sur le résultat suivant qui est admis.

III.1 Théorie de la dimension

Théorème 1 : Soit n un entier naturel non nul.
Si E admet une base constituée de n vecteurs, alors toute autre base de E admet également n vecteurs.