

# CHAPITRE 3

## Modélisations de problèmes de type IRP

---

**Objectifs :** Le VRP présenté au chapitre 2 est un problème mono période qui consiste à visiter des clients où les quantités à livrer sont connues. Le problème d'IRP, pour Inventory Routing Problem, est un problème de type VRP multi-périodes où les quantités à livrer sont des variables du problème. En effet, la demande par client est connue pour chaque période, mais elle peut être partiellement ou totalement livrée par anticipation sur des périodes précédant la demande. Pour une période donnée, il s'agit donc de décider des quantités à livrer et de déterminer les tournées. Ce chapitre montre comment, il est possible de définir une approche gloutonne dans laquelle une solution est construite de manière incrémentale en considérant les périodes itérativement.

### 3.1 Problème de l'IRP

#### 3.1.1 Présentation d'un IRP

Un Inventory Routing Problem (IRP) est un problème de VRP multi-périodes. À chaque période un ensemble de clients doit être livré et l'ensemble des clients ainsi que les quantités demandées par chaque client varient en fonction de la période. L'originalité de l'IRP, par rapport au VRP, est que pour l'IRP les demandes concernant une période  $k$  peuvent éventuellement être livrées par anticipation dans une période précédant  $k$ .

Le problème considéré, dans cet exemple, est un problème avec un seul producteur, plusieurs clients et plusieurs périodes. Le volume total de marchandises livrables sur une période  $k$  est limitée : d'une part par le volume fourni (ou volume produit) par le producteur  $q_k$  ; et d'autre par la capacité totale de la flotte de véhicules. La capacité totale de la flotte de véhicules dépend du nombre de véhicules disponibles et de leurs capacités respectives.

La somme des demandes des clients, pour une période  $k$ , peut dépasser la capacité de livraison  $Cl$  de la flotte de véhicules ou dépasser le volume  $q_k$  de marchandises produites par le producteur. Certaines demandes ne peuvent donc pas être livrées à la période  $k$  et doivent être livrées par anticipation lors d'une période précédente. En cas de livraison correspondant à la période demandée, il n'existe pas de coût de stockage, mais toute livraison anticipée donne lieu à un coût de stockage. De plus, les clients ont une capacité

de stockage maximale et cette capacité est notée  $MS_i^+$  pour le client  $i$ . Une des difficultés de l'IRP est de choisir quelles quantités de produits doit être livrées aux clients et à quelle période afin : de satisfaire les demandes des clients pour chaque période, de respecter la capacité de transport de la flotte de véhicules, et de respecter le volume  $q_k$  de marchandises produites par le fournisseur.

La Figure 3-1 montre le principe général où les demandes du client  $i$  ont été anticipées/déplacées sur des périodes antérieures car la capacité de livraison maximale  $Cl$  est inférieure à la quantité souhaitée par le client  $i$ . Par exemple, la demande du client  $i$  en période 5 est "déplacée" en période 3, et une partie de la demande de la période 7 est déplacée pour une part en période 6 et pour une autre part en période 4. Ces modifications engendrent des coûts de stockage pour le client  $i$ . Le coût de stockage pour une période donnée s'obtient en multipliant le coût de stockage d'un produit (€/produit/unité de temps) par le nombre de produits stockés.

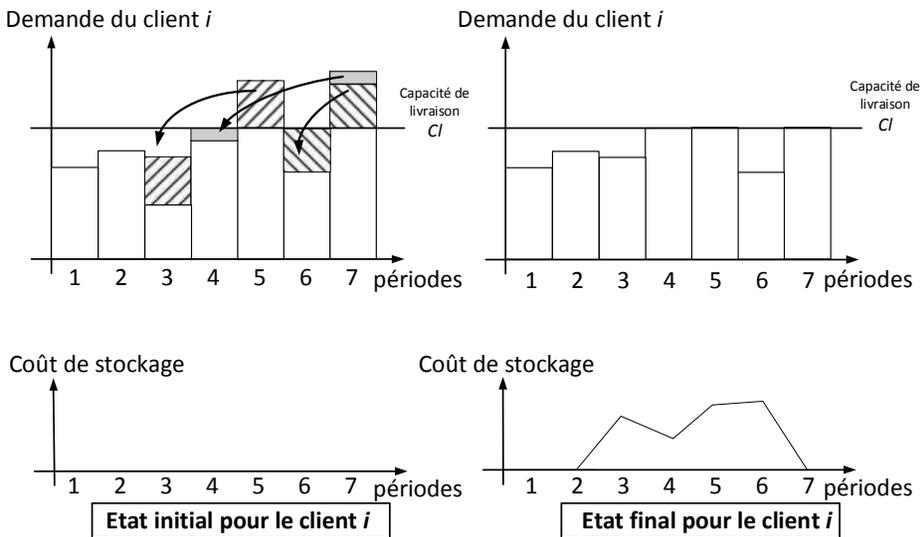


Figure 3-1. Anticipation des livraisons du client  $i$

À chaque période  $k$ ,  $q_k$  produits arrivent dans le stock du producteur et l'évolution de son stock dépend des quantités livrées aux clients. L'objectif de l'IRP est de décider du volume de marchandises à livrer à chaque période pour répondre à toutes les demandes (de la période courante et des futures périodes) des clients. Soit  $g_i^k$  le volume de marchandises livrées en période  $k$  au client  $i$ .

Le volume total livré à l'ensemble  $N$  des clients est noté  $\sum_{i=1}^N g_i^k$  et vient en déduction du stock au niveau du producteur comme le montre la Figure 3-2. La somme  $\sum_{i=1}^N g_i^k$  ne peut pas dépasser la capacité de la flotte de véhicules, faute de quoi, il ne serait pas possible de déterminer les tournées de véhicules.

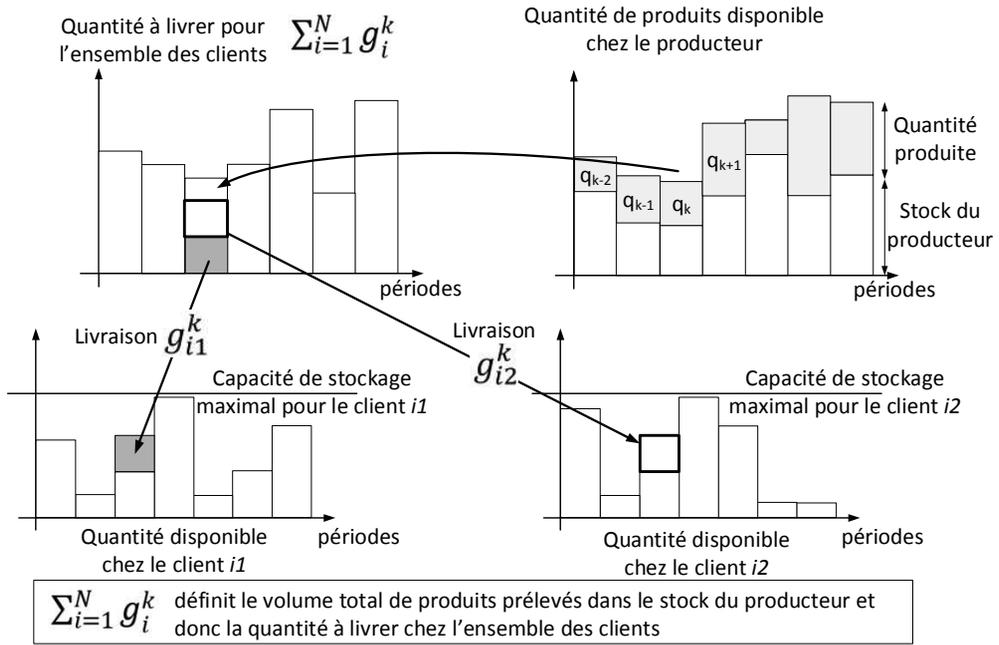


Figure 3-2. Lien entre le producteur et les clients

Pour chaque période  $k$ , il faut : 1) sélectionner les clients à livrer ; 2) choisir la quantité  $g_i^k$  de produits à livrer à chaque client  $i$  ; et 3) calculer les tournées des véhicules (Figure 3-3). Contrairement au VRP (du chapitre 2) où les quantités à livrer sont des données du problème, pour l'IRP, les quantités à livrer sont des variables du problème et nécessitent d'être explicitées dans la solution.

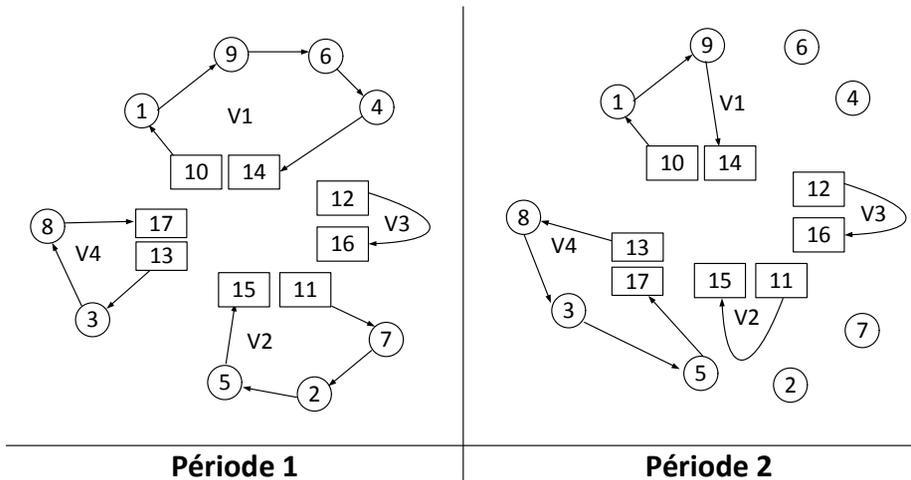


Figure 3-3. La partie "transport" de la solution de l'IRP

Pour résumer, un IRP est un problème de VRP avec en plus une problématique de gestion de stocks au niveau de chaque client (nœud) et du producteur. Des variantes de l'IRP existent et certaines se différencient par la manière dont le niveau maximal des stocks est appréhendé.

Pour un client  $i$ , le niveau de stock en début de période  $k$  est égal au niveau de stock en fin de période  $k - 1$  (Figure 3-4). Le stock en début de période  $k - 1$  pour le client  $i$  est noté  $Stock_i^{k-1}$  et le stock maximal autorisé pour ce client est noté  $MS_i^+$ . Lors de la période  $k - 1$ , le niveau de stock était  $Stock_i^{k-1}$ , au cours de cette période,  $g_i^{k-1}$  produits sont livrés au client  $i$  et celui-ci consomme  $D_i^{k-1}$  produits. Au début de la période  $k$ , le client  $i$  a donc dans son stock la quantité initiale de produits  $Stock_i^{k-1}$  plus la quantité livrée de produits  $g_i^{k-1}$  moins la consommation  $D_i^{k-1}$  de produits :  $Stock_i^k = Stock_i^{k-1} + g_i^{k-1} - D_i^{k-1}$ .

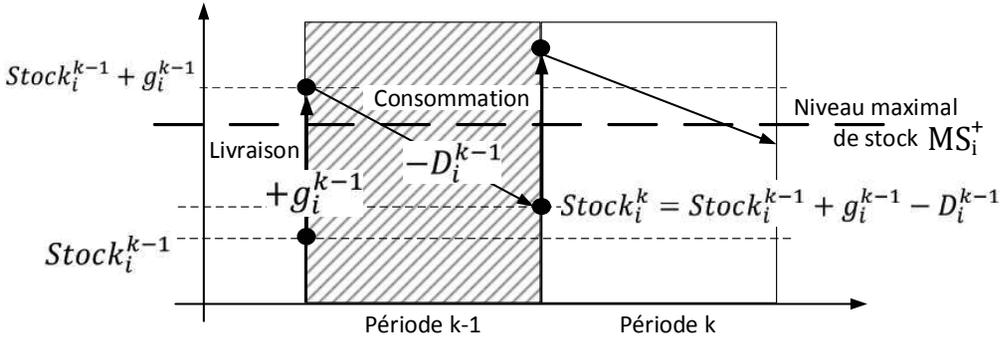


Figure 3-4. Définition du niveau de stock pour un client

Deux cas d'IRP sont couramment étudiés : soit  $MS_i^+$  limite uniquement le stock du client  $i$  ( $Stock_i^{k-1} < MS_i^+$ ) (Figure 3-4) ; soit  $MS_i^+$  limite le stock chez le client plus les livraisons au même instant ( $Stock_i^{k-1} + g_i^{k-1} < MS_i^+$ ) (Figure 3-5). Dans la suite du chapitre, seul le premier cas est envisagé, mais les contraintes à ajouter pour prendre en compte le deuxième cas sont évoquées.

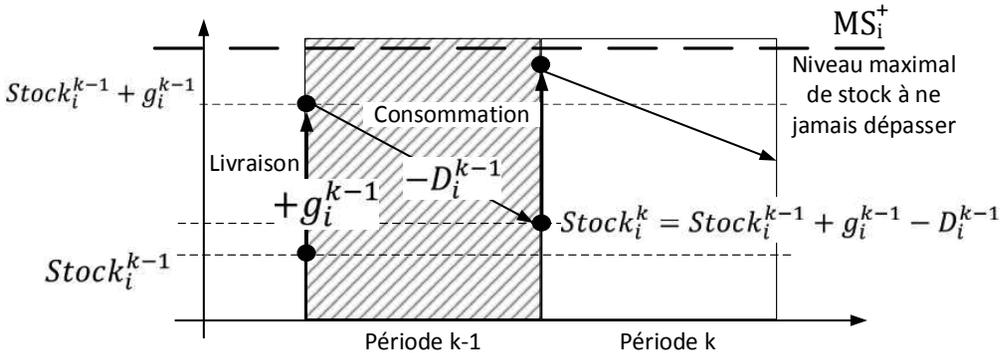


Figure 3-5. Définition du niveau de stock pour un client

Pour le producteur, le niveau de stock en début de période  $k$  est égal au niveau de stock en fin de période  $k - 1$  (Figure 3-6). Le stock en début de période  $k$  pour le producteur est noté  $PStock^k$  et le stock maximal autorisé pour celui-ci est noté  $MP^+$ . Le stock est

modifié sur chaque période en fonction de la demande de tous les clients ( $\sum_{i=1}^N g_i^{k-1}$ ) et de la production ( $q_{k-1}$ ) de la période précédente  $k - 1$ .

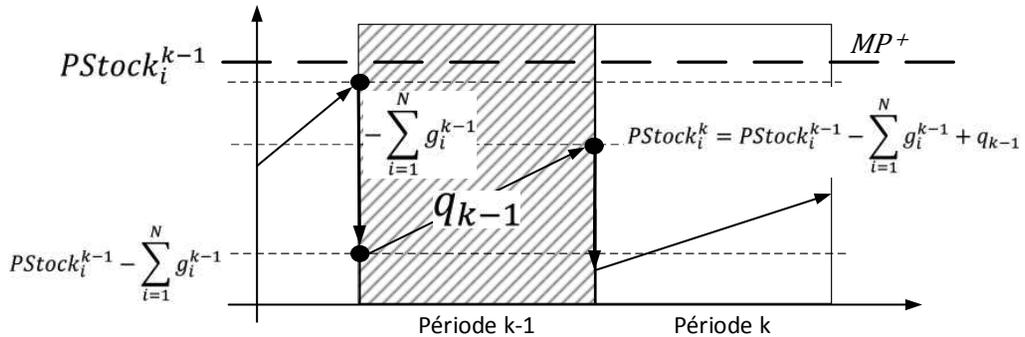


Figure 3-6. Définition du niveau de stock pour le producteur

De manière similaire aux clients, deux cas d'IRP sont à considérer en fonction de la contrainte de stock maximal chez le producteur : soit la contrainte prend en compte la production, soit celle-ci n'est pas prise en considération.

### 3.1.2 Problème du VRP : rappels

Le problème du VRP (Vehicle Routing Problem) est une extension du TSP (Traveling Salesman Problem), dont une modélisation en PPC a été proposée au chapitre 2. Cette modélisation est brièvement rappelée ci-dessous.

#### Les données

$N$	ensemble des clients avec $ N $ pour le nombre de clients
$V$	ensemble des véhicules
$S =  N  + 2 V $	nombre de sommets avec $2 V $ pour le nombre total de dépôts (de dépôts et finaux)
$V^d$	ensemble des dépôts initiaux (un dépôt par véhicule)
$V^f$	ensemble des dépôts finaux (un dépôt par véhicule)
$D_i$	demande du client $i$
$T_{ij}$	distance de $i$ vers $j$ avec $i \in N$ et $j \in N$
$T'_{ij}$	distance de $i$ vers $j$ avec $i \in N \cup V^d \cup V^f$ et $j \in N \cup V^d \cup V^f$
$C_v$	capacité du véhicule $v \in V$

Dans le cadre d'un VRP la demande fait partie des données du problème, elle est notée  $D_i$ .

#### Les variables de décision

$p_i$	$= u$ , le client $i$ est en $u^{\text{ième}}$ position dans la tournée
$s_i$	est le successeur de $i$ ( $\forall i \in N \cup V^d$ ) dans la tournée
$a_i$	$= v$ affectation de $i$ ( $\forall i \in N \cup V^d \cup V^f$ ) à un véhicule $v \in V$
$d$	la distance totale parcourue
$b^v$	ensemble des clients affectés à la tournée du véhicule $v$
$pred_i$	est le prédécesseur de $i$ ( $\forall i \in N \cup V^d$ ) dans la tournée
$CPS_i$	le volume total collecté au niveau du client $i$

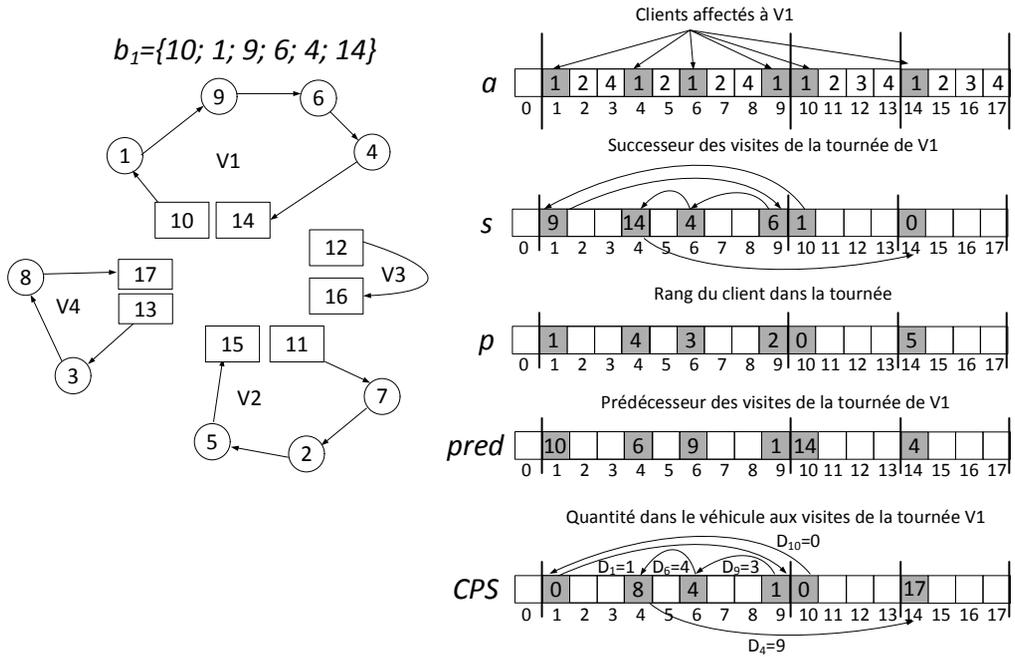


Figure 3-7. Modélisation du VRP sur un exemple

La modélisation d'une solution du VRP repose sur trois vecteurs : un vecteur  $a_i$  qui donne le numéro du véhicule affecté au client  $i$  ; un vecteur  $s_i$  qui définit le successeur de  $i$  ; et le vecteur  $p_i$  qui donne le rang de  $i$  dans la tournée. Les vecteurs  $pred$  et  $CPS$  permettent de "renforcer" le modèle pour être plus efficace. Le vecteur  $pred_i$  donne le prédécesseur de  $i$  dans la tournée et le vecteur  $CPS_i$  indique la charge du véhicule pour répondre aux demandes des clients précédents  $i$  (Figure 3-7).

Le modèle ci-dessous donne le sous-ensemble minimal de contraintes à partir desquelles, les extensions liées à l'IRP sont définies par la suite.

$$\forall i \in N \cup V^d \quad s_i \in [1; S] \quad (1)$$

$$\forall i \in V^f \quad s_i = 0 \quad (2)$$

$$\forall i \in N \quad a_i \in [1; |V|] \quad (3)$$

$$\forall i \in V^f \cup V^d \quad a_i \text{ rang de } i \text{ dans } V^f \text{ ou dans } V^d \quad (4)$$

$$\forall i \in N \cup V^f \quad p_i \in [1; |N| + 1] \quad (5)$$

$$\forall i \in V^d \quad p_i = 0 \quad (6)$$

$$\forall i, j \in \{N \cup V^d \cup V^f\}^2 \quad s_i \neq s_j \quad (7)$$

$$\forall i \in N \cup V^d \quad a_i = a_{s_i} \quad (8)$$

$$\forall i \in N \cup V^d \quad s_i \neq i \quad (9)$$

$$\forall i \in N \cup V^d \quad p_{s_i} = p_i + 1 \quad (10)$$

$$\forall v \in V \quad b^v = \{u \in N \cup V^d \cup V^f / a_u = v\} \quad (11)$$

$$\forall v \in V \quad \sum_{i \in b^v} D_i \leq C_v \quad (12)$$

$$d = \sum_{i=1}^S T_{i,s_i} \quad (13)$$

$$\forall i \in V^d \quad s_i < s_{i+1} \quad (14)$$

$$\forall i \in N \cup V^d \cup V^f \quad CPS_i \in [0; C_v] \quad (15)$$

$$\forall i \in N \cup V^d \cup V^f \quad CPS_{s_i} = CPS_i + D_i \quad (16)$$

$$\forall i \in N \cup V^d \cup V^f \quad CPS_{s_i} = CPS_i + D_i \quad (17)$$

$$\forall i \in N \cup V^d \cup V^f \quad (pred_k = i) \Leftrightarrow (s_i = k) \quad (17)$$

$$\forall k \in N \cup V^f$$

$$\forall i \in N \cup V^d \cup V^f \quad pred_i \in [1; S] \quad (18)$$

$$\forall i \in V^d \quad pred_i \in \{V^f\} \quad (19)$$

Fonction objectif :  $Min d$

## 3.2 Modélisation d'un IRP à un seul produit

### 3.2.1 Un modèle d'IRP basé sur le modèle du VRP

La définition d'une modélisation pour l'IRP nécessite l'introduction de la notion de période et de coût de stockage. Les données supplémentaires nécessaires pour modéliser un IRP sont mises en évidence en gras ci-dessous. Il est important de noter que dans un IRP, la demande  $D_i$  d'un client  $i$  dépend de la période, cette demande est donc maintenant notée  $D_i^k$  où  $k$  est une période. La quantité de production  $q_k$  du producteur est une donnée du problème et varie suivant la période  $k$ . Il faut noter que  $D_i^k$  ne permet pas de connaître la quantité à livrer car la quantité à livrer, pour un client  $i$ , à une période  $k$ , dépend de la variable  $g_i^k$ .

#### Les données

$N$	ensemble des clients avec $ N $ pour le nombre de clients
$V$	ensemble des véhicules avec $v^*$ un véhicule fictif
$nb\_total\_visite$	$=  N  + 2 V $ nombre de sommets avec $2 V $ pour le nombre total de dépôts de départ et le dépôt final
$V^d$	ensemble des dépôts initiaux (un dépôt par véhicule)
$V^f$	ensemble des dépôts finaux (un dépôt par véhicule)
$T_{ij}$	distance de $i$ vers $j$ avec $i \in N$ et $j \in N$
$T'_{ij}$	distance de $i$ vers $j$ avec $i \in N \cup V^d \cup V^f$ et $j \in N \cup V^d \cup V^f$
$C_v$	capacité du véhicule $v$
$K$	nombre de périodes
$G$	quantité maximale de produits livrables sur une période
$D_i^k$	demande du client $i$ pour la période $k$
$SI_i$	stock initial de produits au niveau du client $i$
$SPI$	stock initial de produits au niveau du producteur
$MS_i^+$	le stock maximal au niveau du client $i$
$MS_i^-$	le stock minimal au niveau du client $i$
$MP^+$	le stock maximal au niveau du producteur
$MP^-$	le stock minimal au niveau du producteur

$H$	une constante suffisamment grande
$cp$	coût de stockage en €/unité de temps pour le producteur
$cs_i$	coût de stockage en €/unité de temps pour le client $i$
$q_k$	quantité produite par le producteur en période $k$

### Les variables de décision

Beaucoup de variables existantes, dans le modèle du VRP, doivent avoir un indice supplémentaire  $k$  pour désigner la période telle que  $s_i^k$  qui est le successeur de  $i$  à la période  $k$ , car ce successeur varie suivant les périodes. La quantité de marchandise qu'il faut livrer au client  $i$  pour la période  $k$  est  $g_i^k$ .

Variabiles liées au VRP :

$p_i^k$	= $u$ , le client $i$ est en $u^{\text{ième}}$ position dans la tournée de la période $k$
$s_i^k$	le successeur de $i$ pour la période $k$ avec $s_i^k = i$ si $i$ est non visité
$a_i^k$	= $v$ affectation de $i$ ( $\forall i \in N \cup V^d \cup V^f$ ) à un véhicule $v \in V$ , durant la période $k$
$d_k$	la distance totale parcourue en période $k$
$b^{v,k}$	ensemble des clients de la tournée du véhicule $v$ pour la période $k$
$pred_i^k$	est le prédécesseur de $i$ ( $\forall i \in N \cup V^d$ ) dans la tournée de la période $k$
$CPS_i^k$	le volume total du véhicule au niveau du client $i$ pour la période $k$

Variabiles liées au stockage et à la quantité livrée :

$g_i^k$	quantité livrée au client $i$ pour la période $k$
$Stock_i^k$	le stock au niveau du client $i$ pour la période $k$
$PStock^k$	le stock au niveau du producteur pour la période $k$

Variabiles liées à la fonction objectif :

$DPS_i^k$	distance du client $i$ à son successeur pour la période $k$
$CST$	le coût de stockage total
$d$	la distance totale parcourue
<i>Objectif</i>	le coût total à minimiser qui est la somme du coût de stockage et de la distance

### Les contraintes

Le passage d'un véhicule sur un client  $i$  n'est pas obligatoire et il dépend des quantités à livrer. Par défaut, un client  $i$  qui ne doit pas être visité par un véhicule en période  $k$  possède une quantité à livrer nulle ( $g_i^k = 0$ ).

Le modèle de l'IRP généralise le modèle du VRP du chapitre 2 en introduisant une dimension supplémentaire liée aux périodes. Les contraintes du VRP doivent être complétées par :

- les contraintes (19)-(21) pour définir le stock sur les clients et décrire l'évolution du stock au cours des différentes périodes ;
- les contraintes (22)-(24) pour le stock du producteur ;
- les contraintes (25)-(26) pour calculer le coût de stockage total ;
- les contraintes (29)-(30) pour définir la fonction objectif ;