

Table des matières

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Notions fondamentales | 13 |
| 1.1 | Structures algébriques | 13 |
| 1.1.1 | Ensembles et applications | 13 |
| 1.1.2 | Structures à une loi de composition interne | 16 |
| 1.1.3 | Groupes, sous-groupes et morphismes de groupes | 18 |
| 1.1.4 | Groupe des permutations d'un ensemble | 24 |
| 1.1.5 | Produit direct et semi-direct de groupes | 26 |
| 1.1.6 | Ensembles munis de deux lois de composition interne | 29 |
| 1.1.7 | Algèbre linéaire | 30 |
| 1.1.8 | Algèbre bilinéaire | 40 |
| 1.1.9 | Groupe agissant sur un ensemble | 44 |
| 1.1.10 | Ensembles munis de deux lois internes et d'une loi externe : les algèbres | 53 |
| 1.2 | Géométrie | 56 |
| 1.2.1 | Géométrie axiomatique plane | 57 |
| 1.2.2 | Espaces affines | 60 |
| 1.2.3 | Plan projectif | 71 |
| 1.3 | Analyse et calcul différentiel | 90 |
| 1.3.1 | Notion de norme sur \mathbb{R}^n et topologie | 90 |
| 1.3.2 | Continuité et limite | 91 |
| 1.3.3 | Homéomorphismes | 92 |
| 1.3.4 | Fonctions différentiables | 94 |
| 1.3.5 | Variétés différentiables | 98 |
| 1.3.6 | Retour sur les groupes | 111 |
| | Exercices | 118 |
| 2 | Groupes | 121 |
| 2.1 | Théorie des corps. Théorie de Galois | 126 |
| 2.1.1 | Corps et sous-corps | 126 |
| 2.1.2 | Éléments de théorie de Galois | 135 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2.2 | Représentations | 141 |
| 2.2.1 | Action de groupe | 141 |
| 2.2.2 | Représentations linéaires | 142 |
| 2.2.3 | Produit tensoriel | 146 |
| 2.2.4 | Relations d'orthonormalité pour les RI s, caractères . . . | 149 |
| 2.3 | Espace de Hilbert | 155 |
| 2.3.1 | Espace préhilbertien | 155 |
| 2.3.2 | Les espaces de Hilbert en mécanique quantique | 157 |
| 2.3.3 | Action de groupe sur un espace de Hilbert | 159 |
| 2.3.4 | Opérateurs scalaires, vectoriels et tensoriels | 160 |
| 2.3.5 | Groupes doubles | 169 |
| 2.4 | Le groupe des translations | 171 |
| 2.5 | Le problème du renversement du temps | 173 |
| 2.6 | Théorème de Wigner-Eckart | 176 |
| 2.7 | Théorème de Noether | 177 |
| 2.8 | Tableaux d'Young | 184 |
| 2.9 | Éléments de cristallographie | 189 |
| 2.9.1 | Groupes de frise et pavages | 189 |
| 2.9.2 | cristaux tridimensionnels | 192 |
| 2.9.3 | Groupes de Shubnikov | 199 |
| | Exercices | 202 |
| 3 | Algèbres de Lie | 213 |
| 3.1 | Définitions | 213 |
| 3.2 | Relation avec les groupes de Lie | 217 |
| 3.3 | Représentations | 223 |
| 3.4 | Algèbres simples et semi-simples | 225 |
| 3.5 | Classification des algèbres simples | 228 |
| 3.6 | Représentations des algèbres semi-simples | 246 |
| 3.7 | Intérêt des algèbres de Lie en physique | 255 |
| | Exercices | 257 |
| 4 | Topologie | 259 |
| 4.1 | Graphes, nœuds, tresses | 261 |
| 4.1.1 | Les graphes | 261 |
| 4.1.2 | Les nœuds | 262 |
| 4.1.3 | Les tresses | 268 |
| 4.2 | Espace topologique | 271 |
| 4.2.1 | Espace vectoriel normé | 271 |
| 4.2.2 | Les espaces métriques | 272 |
| 4.2.3 | Le concept de topologie | 274 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.2.4 | Chemins, lacets, connexité | 287 |
| 4.2.5 | Présentation d'un groupe | 292 |
| 4.2.6 | Théorème de Seifert Van Kampen | 294 |
| | Exercices | 304 |
| 5 | Homologie et cohomologie | 313 |
| 5.1 | Bref historique | 313 |
| 5.2 | Homologie | 316 |
| 5.2.1 | Nombres de Betti | 316 |
| 5.2.2 | Simplexes et complexes simpliciaux | 317 |
| 5.2.3 | Opérateurs de bord (approche intuitive) | 318 |
| 5.2.4 | Groupes d'homologie | 319 |
| 5.2.5 | Détermination des groupes d'homologie | 323 |
| 5.3 | Cohomologie | 325 |
| 5.4 | Cohomologie de de Rham | 326 |
| 5.5 | Au-delà de la cohomologie de de Rham | 332 |
| 5.5.1 | La cohomologie de Hochschild | 332 |
| 5.5.2 | La recherche d'une cohomologie universelle | 336 |
| | Exercices | 361 |
| 6 | Variétés différentiables | 363 |
| 6.1 | Différentiabilité d'une variété | 363 |
| 6.2 | Vecteurs tangents et formes différentielles | 364 |
| 6.3 | Tenseurs | 369 |
| 6.3.1 | Rappels | 369 |
| 6.3.2 | Produit tensoriel | 370 |
| 6.3.3 | Algèbre extérieure | 371 |
| 6.4 | Formes différentielles | 373 |
| 6.4.1 | Dualité de Hodge | 376 |
| 6.4.2 | Codifférentielle de Hodge | 379 |
| 6.4.3 | Dérivée de Lie | 379 |
| 6.5 | Dérivée covariante et connexion | 382 |
| 6.6 | Variétés riemanniennes | 387 |
| 6.6.1 | Connexion riemannienne, connexion de Levi-Civita | 389 |
| 6.6.2 | Courbure d'une variété riemannienne | 392 |
| | Exercices | 396 |
| 7 | Espaces fibrés | 401 |
| 7.1 | Généralités | 401 |
| 7.2 | Connexions | 409 |
| 7.2.1 | Transport parallèle dans un fibré principal. | 416 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 7.3 | Courbure et torsion | 418 |
| 7.3.1 | Courbure | 418 |
| 7.3.2 | Torsion | 420 |
| | Exercices | 421 |
| 8 | Quaternions et octonions | 425 |
| 8.1 | Généralités | 425 |
| 8.2 | Algèbres | 426 |
| 8.3 | Quaternions et $SO(3, \mathbb{R})$ | 429 |
| 8.4 | Représentation géométrique des quaternions | 431 |
| 8.5 | Octonions | 434 |
| 8.5.1 | Groupes de Lie exceptionnels <i>vs</i> octonions | 439 |
| | Exercices | 448 |
| | Solutions des exercices | 451 |
| | Bibliographie | 547 |
| | Index | 549 |