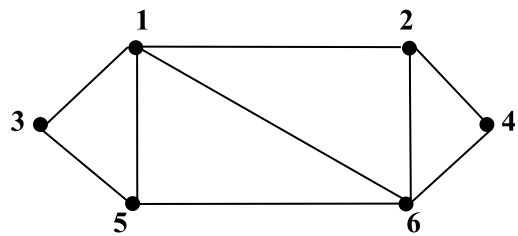
Chapitre 4. Couplage et transversal

4.1 Couplage

Soit $G=(X,E)$ un graphe. $E' \subset E$ est un *couplage* de G s'il est formé d'arêtes deux à deux non adjacentes.

- Dans le graphe $G'=(X,E')$, $d_{G'}(x) \leq 1, \forall x \in X$.
- Si $d_{G'}(x)=1$, x est dit *saturé* par E'.
- Si $d_{G'}(x)=0$, x est dit *non saturé* par E'.
- E' est dit *parfait* s'il sature tous les sommets du graphe.

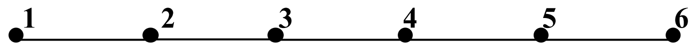
Un couplage E' de G est dit *maximal* si $E' \cup \{x\}$ n'est pas un couplage de G, $\forall x \in X$. Il sera dit *maximum* si $|E'| \geq |C|, \forall C$, couplage de G.



Les arêtes 15 et 26 forment un couplage maximal
Les arêtes 35, 16 et 24 forment un couplage maximum

Définition 4.1. $G=(X,E)$ un graphe ; E' un couplage de G.
Une *chaîne alternée* par rapport à E' est une chaîne élémentaire telle que ses arêtes appartiennent, alternativement, à $E-E'$ et E'.

Conséquence 4.2. Une chaîne alternée est de longueur impaire si et seulement si ses extrémités sont des sommets non saturés par E'. Sur une telle chaîne, le couplage est améliorable.



Chaîne alternée de longueur impaire, avec $E'=\{23,45\}$ maximal. E' améliorable en $\{12,34,56\}$.

Théorème 4.3. Un couplage E' est maximum dans $G=(X,E)$ si et seulement s'il n'existe pas de chaîne alternée de longueur impaire.

Preuve : $\Rightarrow$: Supposons qu'il existe une telle chaîne alternée de longueur impaire $C=(x_1,x_2,x_3,...,x_{k-2},x_{k-1},x_k)$, telle que les arêtes x_1x_2 et $x_{k-1}x_k$ n'appartiennent pas à E'. Il suffit de reconsidérer cette même chaîne commençant par $x_1x_2 \in E'$ et d'alterner les arêtes jusqu'à $x_{k-1}x_k \in E'$. On obtient, ainsi, un couplage E'' tel que $|E''|=|E'|+1$; E' n'est donc pas maximum.

$\Leftarrow$: Supposons que le couplage E' n'est pas maximum. Considérons-le maximal. Il suffit de lui appliquer l'algorithme du couplage maximum dont le marquage produira une chaîne alternée de longueur impaire.

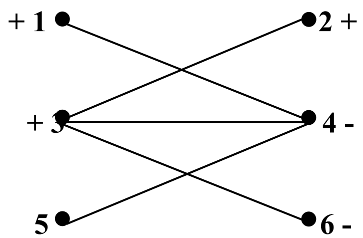
Corollaire 4.4. $G=(X,E)$ un graphe ; $E' \subset E$.
E' couplage parfait de $G \Rightarrow E'$ couplage maximum de G.

En effet, le graphe ne contient pas de chaîne alternée de longueur impaire. Le couplage E' n'est donc pas améliorable.

4.2 Couplage dans les graphes bipartis

Algorithme de marquage. $G=(X_1,X_2,E)$ un graphe biparti ; E' un couplage maximal de G.

. Si E' sature tous les sommets de G, il est maximum
. Sinon, on applique l'algorithme suivant :
(0) Aucun sommet n'est marqué
(1) . Si tous les sommets non saturés sont marqués, aller en (2)
. S'il existe un sommet x non saturé et non marqué, aller en (3)
(2) Marquer de + (resp. de −) tous les sommets non marqués de X_1 (resp. X_2), terminé
(3) Marquer x de + et appliquer, en répétant, la procédure suivante :
  . Si y est marqué de +, marquer de – tous les voisins de y
    . Si un sommet non saturé est marqué de −, terminé
    . Marquer de + le voisin dans (X_1,X_2,E') d'un sommet marqué de −, aller en (1).



$G = (X_1, X_2, E); E' = \{34\}$ couplage maximal

4.3 Transversal

Soit $G = (X, E)$ un graphe.
$T \subset X$ est un *transversal* (ou *couverture* de sommets) de G si toute arête de E possède, au moins, une extrémité dans T.
Un transversal T de G est minimal si $T - \{x\}, \forall x \in T$, n'est pas un transversal de G.
Un transversal T de G est minimum si $|T| \leq |T'|, \forall T'$ transversal de G.

Remarque 4.5. 1) Le transversal trivial de G est X.
2) Plus on veut réduire la cardinalité d'un transversal, plus la tâche est difficile ; d'où le Problème du transversal minimum dans un graphe donné.

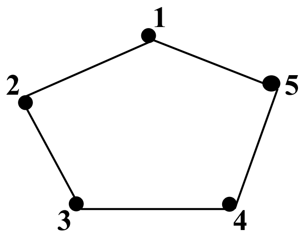
Exemple. Dans le graphe de la page 60, (12345) et (1236) sont deux transversaux du graphe.

Proposition 4.6. Soit $G = (X, E)$. Pour tout transversal T de G et tout couplage E' de G, on a $|E'| \leq |T|$.

Preuve : Soit l'application $\varphi : E' \to T$ telle que $\varphi(e), e \in E'$, représente une extrémité de e dans T. Pour montrer le résultat de la proposition, il suffit de montrer que l'application φ est injective. Prenons deux arêtes $e_1 \in E'$ et $e_2 \in E'$ telles que $e_1 \neq e_2$. Alors, $\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$ car, sinon, e_1 et e_2 seraient adjacentes. Or, E' est un couplage.

Remarque 4.7. La proposition étant vraie pour tout transversal T et tout couplage E' de G, on a, en particulier, $|E'_{\max}| \leq |T_{\min}|$.

Corollaire 4.8. S'il existe E' et T, couplage et transversal de G, tels que $|E'|=|T|$, alors E' est un couplage maximum et T est un transversal minimum de G.



Le cycle impair de longueur $(2k+1)$ sommets

Le transversal minimum $T_{\min}$ est tel que $|T_{\min}|=k+1$; exemple $\{1,3,4\}$

Le couplage maximum $E'_{\max}$ est tel que $|E'_{\max}|=k$; exemple $\{15,23\}$

Ceci montre que la réciproque du corollaire est fausse.

Théorème 4.9. L'algorithme de marquage ci-dessus aboutit, en un nombre fini d'étapes, à

1) soit une chaîne alternée par rapport à E' dont les extrémités sont non saturées par le couplage (sortie en (3) de l'algorithme)
2) soit un transversal T tel que $|T|=|E'|$ (sortie en (2) de l'algorithme)

Preuve : 1) La sortie de l'algorithme en (3) produit, via le marquage, une chaîne alternée en + et – sur laquelle le couplage est amélioré.
2) L'ensemble des sommets marqués de -, à la sortie en (2) de l'algorithme, forme un transversal. $T=\{x \in X, x\ marqué\ -\}$ est un transversal, pendant que le couplage est maximum.

Théorème de Koenig 4.10. Dans un graphe biparti $G=(X_1,X_2,E)$, la cardinalité d'un couplage maximum est égale à $\min_{A\subset X_1}\{|X_1-A|+|\Gamma_G(A)|\}$, où $\Gamma_G(A)=\{y\in X_2, y\ adjacent\ à, au\ moins, un\ sommet\ de\ A\}$.

Preuve : Tout transversal T de G est de la forme $T=(X_1-A)\cup\Gamma_G(A)$, avec $(X_1-A)\cap\Gamma_G(A)=\phi$. Donc $|E_{\max}|=|T_{\min}|=\min_{A\subset X_1}\{|X_1-A|+|\Gamma_G(A)|\}$.

Corollaire 4.11. (Koenig- Hall). Un graphe biparti $G=(X_1,X_2,E)$ possède un couplage parfait pour X_1 si et seulement si $|\Gamma_G(A)|\geq|A|, \forall A\subset X_1$.

Chapitre 5. Flots et problème du flot maximum

Soient $G=(X,U)$ un graphe, avec $U=\{u_1,u_2,...,u_m\}$, et F_G, le sous- espace engendré par les vecteurs représentatifs de cycles.

Définition 5.1. On dit que $f=(f_1,f_2,...,f_m)\in\Re^m$, où $f_i=f(u_i), i=1,2,...,m$, est un *flot* sur G si $f\in F_G$.

Soit une application $\begin{array}{c} c:U\to\Re\bigcup\{+\infty\} \\ u\mapsto c(u)\end{array}$, où $c(u)$ est appelé *capacité* de l'arc

Définition 5.2. On dit que $f\in\Re^m$ est un *flot réalisable* sur G si

1) $\forall A\subset X, \sum_{u\in W^+(A)} f(u)=\sum_{u\in W^-(A)} f(u)$ (Loi de conservation des flux).

2) $\forall u\in U, 0\le f(u)\le c(u)$

$$W(A)=(w_1,w_2,...,w_m);\ w_i=\begin{cases}0 & si\ u_i\notin W(A)\\ 1 & si\ u_i\in W^+(A)\\ -1 & si\ u_i\in W^-(A)\end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{m} f_i w_i=\sum_{i/w_i\neq 0} f_i w_i=\sum_{u_i\in W^+(A)} f_i w_i+\sum_{u_i\in W^-(A)} f_i w_i=\sum_{u_i\in W^+(A)} f_i-\sum_{u_i\in W^-(A)} f_i=0$. Ceci implique que $\sum_{u_i\in W^+(A)} f_i=\sum_{u_i\in W^+(A)} f_i$

Définition 5.3. On appelle *réseau* $R=(G,c)$, le graphe G muni de l'application c. Ce réseau possède une seule *entrée* e et une seule *sortie* s. Ces sommets sont tels que $d^-(e)=0$ et $d^+(s)=0$

Remarque 5.4. Pour que la conservation des flux soit vérifiée en e et s, il faut que $\sum_{u\in W^+(e)} f_i=\sum_{u\in W^-(s)} f_i=0$. Pour permettre l'égalité sans que ces sommes des flux soient nulles, on crée un arc supplémentaire qui n'appartient pas au graphe, appelé *l'arc de retour*. On le note $u_r=(s,e)$.

Problème du flot maximum

Soit un réseau $R=(G,c)$, d'entrée e et de sortie s. Trouver un flot de valeur maximum dans le réseau.

Notons que la valeur maximum du flot est la valeur maximum du flux porté par l'arc u_r. Ainsi, on peut écrire le problème du flot maximum comme un problème de la programmation linéaire suivant :

max $f(u_r)$

$$\begin{cases} A.f=0 & (1) \\ 0\le f\le c & (2) \end{cases}$$

(1) et (2) signifient que f est un flot sur G.

A est la matrice d'incidence du graphe et (1) désigne la conservation des flux

Algorithme de Ford et Fulkerson

(0) Poser $Y=(e)$; $\delta(e)=+\infty$

(1) . Si $s\in Y$, poser $x=s;\quad C^+=\{u_r\};\quad C^-=\phi;\quad aller\ en\ (2)$

Si $s\notin Y$, on essaie de marquer un sommet hors de Y par l'un des processus :

a) Marquage direct : Il existe un arc $u=(x,y)$ tel que

$x\in Y\ et\ y\notin Y\ et\ f(u)<c(u)$

Poser $Y=Y\cup\{y\};\ \delta(y)=\min\{\delta(x),c(u)-f(u)\};\quad A(y)=u;\ aller\ en\ (1)$

b) Marquage inverse : Il existe un arc $u=(y,x)$ tel que

$u\ne u_r;\ x\in Y\ et\ y\notin Y\ et\ f(u)>0$

Poser $Y=Y\cup\{y\};\ \delta(y)=\min\{\delta(x),f(u)\};\quad A(y)=u;\ aller\ en\ (1)$

S'il est impossible de marquer un nouveau sommet, c'est-à-dire si on ne peut appliquer ni a), ni b), terminé : Le flot actuel est maximum.

(2) . Si $x=e;\ aller\ en\ (3)$

. Si $x\ne e;\ u=A(x)$

- Si $x=T(u),\ poser\ C^+=C^+\cup\{u\};\ x=I(u);\ aller\ en\ (2)$
- Si $x=I(u),\ poser\ C^-=C^-\cup\{u\};\ x=T(u);\ aller\ en\ (2)$

(3) Poser $\varepsilon=\delta(s)$. On définit le nouveau flot par :

$$f(u)=\begin{cases} f(u)+\varepsilon & si\ u\in C^+ \\ f(u)-\varepsilon & si\ u\in C^- \\ f(u) & si\ u\notin C \end{cases}$$

Poser $Y=\{e\};\quad aller\ en\ (1)$

Chapitre 6. Nombre de stabilité

Définition 6.1. Soit $G=(X,E)$ un graphe. $S\subset X$ est dit *stable* ou *indépendant* de G si $\forall x,y\in S, xy\notin E$.

Exemple. Si $G=(X_1,X_2,F)$ est un graphe biparti, X_1 et X_2 sont des stables de G .

Autres caractérisations.

1) S est un stable du graphe si $V(S)\cap S=\phi$, où $V(S)$ est l'ensemble des voisins de S.
2) S est un stable de G si S est vide d'arête.

. Un stable S de G est *maximal* si $S\cup\{x\}, \forall x\in X-S,$ n'est pas un stable.

. Un stable S de G est *maximum* $|S|\geq|S'|, \forall S'$ stable de G.

Remarque 6.2. Plus la cardinalité d'un stable est grande, plus il est difficile de la trouver.

6.1 Recherche d'indépendant maximal

Entrée : $G=(X,E)$ un graphe, avec $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$.

Sortie : Calculer un stable maximal S de G.

Procédé

1) $S=\{x_t\}, t\in\{1,2,...,n\}$
2) Calculer les voisins de x_t ; soit $\Gamma(x_t)=\{x_1,x_2,...,x_j\}$
3) Si $S\cup\Gamma(S)=X$, terminé : S est maximal
4) Sinon, faire $S=\{x_t,x_l\}$, avec $x_l\notin\{x_1,x_2,...,x_j\}$; aller en 3-

On appelle *nombre de stabilité* du graphe G , la cardinal d'un stable maximum de G ; on le note $\alpha(G)$

Si I représente la famille de stables de G, $\alpha(G)=\max\limits_{S\notin \mathrm{I}}|S|$.

6.2 Stable et partition minimum en cliques

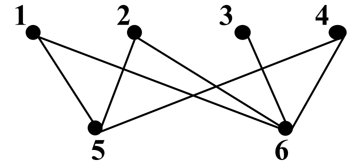
Soit $G=(X,E)$ un graphe. L'opération qui consiste à ranger les sommets de X en cliques de G s'appelle *Partition des sommets de G en cliques*. Il s'agit de former le plus petit nombre de cliques de telle sorte que chaque sommet soit dans une clique et une seule. Ce plus petit nombre de cliques est dit *Partition minimum en cliques de G* ; on le note $\theta(G)$.

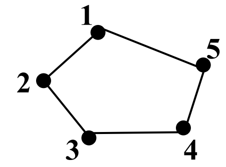
Théorème 6.3. Soit $G=(X,E)$ un graphe.

1) $\alpha(G)\leq\theta(G)$
2) Pour S stable et C une partition en cliques, avec $|S|=|C|$, alors S est maximum et C est minimum.

Preuve : Soit S un stable et C une partition en $C_1,C_2,...,C_k$ cliques.
$|S\cap C_i|\leq 1, i=1,2,...,k$ (Un stable et une clique ne se rencontrent qu'une seule fois, en un seul sommet). Et donc, $|S|\leq|C|$. Ceci implique :
$\alpha(G)=\max|S|\leq\min|C|=\theta(G)$. A la limite, on a bien : Si $|S|=|C|$, alors S est maximum et C est minimum.

Exemple. Le graphe G biparti est tel que $\alpha(G)=\theta(G)$





$$S_{\max}=\{1,2,3,4\} \; ; \; C_{\min}\{15,26,3,4\} \; ; \; \alpha(G)=\theta(G)=4$$
$$S_{\max}=\{2,4\} \; ; \; C_{\min}=\{12,34,5\} \; ; \; \alpha(G)=2 \text{ et } \theta(G)=3$$

6.3 Séquence alternée relative à un stable

$G=(X,E)$ un graphe et B un stable de G. Une *séquence alternée* relative à B est la suite $\sigma=(a_1,b_1,a_2,b_2,...,...)$, où $a_i\in A=X-B$ et $b_i\in B$, telle que