Chapitre 6

Fonction hypergéométrique de Kummer

Les propriétés de la fonction hypergéométrique de Kummer ${}_1F_1$ peuvent se déduire des résultats généraux sur les fonctions hypergéométriques (chapitre 3), mais aussi des propriétés de la fonction hypergéométrique de Gauss par confluence. Elle intervient dans de nombreux problèmes, notamment par ses cas particuliers (fonction des erreurs, fonction gamma incomplète...).

6.1 Définition et exemples

Dans tout ce chapitre, a et c sont des nombres réels fixés.
La *fonction hypergéométrique de Kummer* ${}_1F_1$ est définie comme la somme de la série entière

$$ {}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array} \middle| \, x \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k \, k!} x^k, \tag{6.1} $$

où $(a)_k$ désigne le symbole de Pochhammer. Cette série entière a un rayon de convergence infini, comme on le voit facilement en appliquant la règle de d'Alembert. Donc *la fonction* ${}_1F_1$ *est définie sur* $\mathbb{R}$. Comme dans le cas général (section 3.1), nous avons deux cas à distinguer.

Cas 1 : a est un entier négatif, par exemple $a = -n$, avec $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la fonction ${}_1F_1$ se réduit à un *polynôme hypergéométrique*. Le nombre c peut être un entier négatif, à condition que $c \leq a$.

Cas 2 : a n'est pas un entier négatif. Il faut alors supposer que $c \notin \mathbb{Z}_-$, de façon à ce que $(c)_k$ ne soit jamais nul.

La fonction de Kummer ${}_1F_1$ peut être considérée comme un cas limite de la fonction hypergéométrique de Gauss au sens suivant : pour tout x réel,

$$\lim_{b\to+\infty} {}_2F_1\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array}\middle|\, \frac{x}{b}\right) = {}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}\middle|\, x\right) \tag{6.2}$$

(voir exemple 3.8). Pour cette raison, la fonction de Kummer ${}_1F_1$ s'appelle aussi *fonction hypergéométrique confluente.*

La fonction ${}_1F_1$ vérifie sur $\mathbb{R}$ l'*équation hypergéométrique confluente*

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (c-x)\frac{dy}{dx} - ay = 0, \tag{6.3}$$

comme on l'a vu (exercice 3.9), et la représentation de ${}_1F_1$ par une *intégrale de Pochhammer* s'écrit : si $c > a > 0$, alors pour tout x réel

$${}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}\middle|\, x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{xt}dt. \tag{6.4}$$

(voir exemple 3.10). Comme dans le cas de la fonction hypergéométrique de Gauss, la restriction $c \notin \mathbb{Z}_-$ peut être levée en utilisant la *fonction hypergéométrique modifiée*, définie pour tous réels a, c et x par

$${}_1\mathcal{F}_1\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}\middle|\, x\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a)_k}{\Gamma(c+k)\,k!}x^k. \tag{6.5}$$

Si $c \notin \mathbb{Z}_-$, on a

$${}_1\mathcal{F}_1\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}\middle|\, x\right) = \frac{1}{\Gamma(c)}{}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array}\middle|\, x\right), \tag{6.6}$$

et si $c = -n \in \mathbb{Z}_-$, on a comme en (4.8)

$${}_1\mathcal{F}_1\left(\begin{array}{c} a \\ -n \end{array}\middle|\, x\right) = \frac{(a)_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}\cdot {}_1F_1\left(\begin{array}{c} a+n+1 \\ n+2 \end{array}\middle|\, x\right). \tag{6.7}$$

Donnons quelques exemples de fonctions hypergéométriques confluentes.

Exemple 6.1 La *fonction d'erreur de Gauss* joue un rôle fondamental en calcul des probabilités puisqu'elle est liée à la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Elle est définie pour tout x réel par

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt. \tag{6.8}$$

Autrement dit, au facteur $2/\sqrt{\pi}$ près, c'est la primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ qui s'annule pour $x = 0$. Le facteur $2/\sqrt{\pi}$ est un *facteur de normalisation*, qui permet d'écrire

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1 \tag{6.9}$$

grâce à (1.10). Un calcul élémentaire montre que, pour tout x réel,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \times {}_1F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| -x^2 \right). \tag{6.10}$$

Voir l'exercice 6.1 pour la démonstration de (6.10).

Exemple 6.2 La *fonction gamma incomplète* est la fonction de deux variables définie sur $]0, +\infty[^2$ par

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt. \tag{6.11}$$

On vérifie (exercice 6.2) que, pour tout $(a, x) \in]0, +\infty[^2$,

$$\gamma(a, x) = \frac{x^a}{a} {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ a+1 \end{matrix} \middle| -x \right). \tag{6.12}$$

En comparant à (6.10), on voit que pour tout $x > 0$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right), \tag{6.13}$$

ce qui pourrait d'ailleurs se vérifier directement en posant $u = t^2$ dans (6.8). En outre on a évidemment, pour tout $a > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \gamma(a, x) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = \Gamma(a). \tag{6.14}$$

6.2 Propriétés générales

6.2.1 Identité de Kummer

Remplaçons x par x/b dans la formule de transformation de Gauss (4.58) :

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{b} \right) = \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{c-a-b} {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{b} \right).$$

En faisant tendre b vers $+\infty$ et en utilisant (1.24), on obtient par confluence (exercice 6.3) l'*identité de Kummer* :

$$ {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\middle| x\right) = e^x {}_1F_1\left(\begin{matrix} c-a \\ c \end{matrix}\middle| -x\right) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{6.15} $$

En l'appliquant à (6.12), il vient

$$ \gamma(a,x) = \frac{x^a e^{-x}}{a} {}_1F_1\left(\begin{matrix} 1 \\ a+1 \end{matrix}\middle| x\right) = \frac{x^a e^{-x}}{a} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(a+1)_k}. \tag{6.16} $$

6.2.2 Relations de contiguïté

La fonction hypergéométrique de Kummer $F = {}_1F_1\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\middle| x\right)$ admet quatre fonctions contigües, notées

$$ \begin{aligned} F^{a+1} &= {}_1F_1\left(\begin{smallmatrix} a+1 \\ c \end{smallmatrix}\middle| x\right), & F^{a-1} &= {}_1F_1\left(\begin{smallmatrix} a-1 \\ c \end{smallmatrix}\middle| x\right), \\ F_{c+1} &= {}_1F_1\left(\begin{smallmatrix} a \\ c+1 \end{smallmatrix}\middle| x\right), & F_{c-1} &= {}_1F_1\left(\begin{smallmatrix} a \\ c-1 \end{smallmatrix}\middle| x\right). \end{aligned} $$

Elles vérifient six relations de contigüité, qui s'obtiennent par confluence à partir des relations de contiguïté (4.19), (4.20), (4.21) et (4.22) vérifiées par la fonction hypergéométrique de Gauss. Elles s'écrivent (voir exercice 6.4 pour le détail des calculs) :

$$ \left.\begin{array}{l} aF^{a+1} - (c-1)F_{c-1} + (c-a-1)F = 0, \\ aF^{a+1} + (a-c)F^{a-1} + (c-2a-x)F = 0, \\ (c-a)xF_{c+1} + c(c-1)F_{c-1} - c(c-1+x)F = 0, \\ (c-a)F^{a-1} - (c-1)F_{c-1} + (a-1+x)F = 0, \\ cF^{a-1} + xF_{c+1} - cF = 0, \\ acF^{a+1} + (c-a)F_{c+1} - c(a+x)F = 0. \end{array}\right\} \tag{6.17} $$

6.2.3 Solutions de l'équation hypergéométrique confluente

Nous cherchons ici à résoudre l'équation hypergéométrique confluente

$$ x\frac{d^2y}{dx^2} + (c-x)\frac{dy}{dx} - ay = 0 \tag{6.18} $$

sur l'intervalle $]0,+\infty[$. On sait déjà que $y_1 = {}_1F_1\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\middle| x\right)$ est solution de (6.18) sur $\mathbb{R}$. En procédant comme pour la fonction hypergéométrique de Gauss (exercice 6.5), on voit qu'une deuxième solution est

$$ y_2 = x^{1-c} {}_1F_1\left(\begin{matrix} a-c+1 \\ 2-c \end{matrix}\middle| x\right). \tag{6.19} $$

Les fonctions y_1 et y_2 sont bien définies sur $]0,+\infty[$. En outre, elles sont linéairement indépendantes si $c \notin \mathbb{Z}$ (exercice 6.6). Ainsi on a le

Théorème 6.1 *Si $c \notin \mathbb{Z}$, la solution générale de (6.18) sur $]0,+\infty[$ s'écrit*

$$y = A \cdot {}_1F_1\left(\left.\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\right| x\right) + B \cdot x^{1-c}{}_1F_1\left(\left.\begin{matrix} a-c+1 \\ 2-c \end{matrix}\right| x\right),$$

où A et B sont deux constantes arbitraires.

Exemple 6.3 Soit $c \notin \mathbb{Z}^-$. Démontrons que, pour tout x réel

$${}_0F_1\left(\left.\begin{matrix} \cdot \\ c \end{matrix}\right| \frac{x^2}{16}\right) = e^{-\frac{x}{2}}{}_1F_1\left(\left.\begin{matrix} c-\frac{1}{2} \\ 2c-1 \end{matrix}\right| x\right). \tag{6.20}$$

Pour cela, observons d'abord que la fonction $z = {}_0F_1\left(\left.\begin{smallmatrix} \cdot \\ c \end{smallmatrix}\right| x\right)$ vérifie l'équation différentielle $xz'' + cz' - z = 0$, comme on l'a vu dans l'exercice 3.9. En remplaçant x par $x^2/16$, il vient

$$\frac{x^2}{16}z''\left(\frac{x^2}{16}\right) + cz'\left(\frac{x^2}{16}\right) - z\left(\frac{x^2}{16}\right) = 0. \tag{6.21}$$

Si nous posons

$$u = z\left(\frac{x^2}{16}\right) = {}_0F_1\left(\left.\begin{matrix} \cdot \\ c \end{matrix}\right| \frac{x^2}{16}\right),$$

nous avons

$$u' = \frac{x}{8}z'\left(\frac{x^2}{16}\right), \quad u'' = \frac{1}{8}z'\left(\frac{x^2}{16}\right) + \frac{x^2}{64}z''\left(\frac{x^2}{16}\right),$$

d'où il résulte

$$z'\left(\frac{x^2}{16}\right) = \frac{8}{x}u', \quad \frac{x^2}{16}z''\left(\frac{x^2}{64}\right) = 4u'' - \frac{4}{x}u'.$$

En reportant dans (6.21), on voit que u vérifie l'équation différentielle

$$4xu'' + 4\,(2c-1)\,u' - xu = 0. \tag{6.22}$$

Posons $u = e^{-\frac{x}{2}}y$. On a $u' = e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}y + y'\right)$ et $u'' = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}y - y' + y''\right)$. Ainsi y vérifie $xy'' + (2c-1-x)\,y' - \left(c - \frac{1}{2}\right)y = 0$, équation hypergéométrique confluente. En supposant que $2c-1 \notin \mathbb{Z}$, il existe alors deux constantes A et B telles que, pour tout $x > 0$,

$$y = A \cdot {}_1F_1\left(\left.\begin{matrix} c-\frac{1}{2} \\ 2c-1 \end{matrix}\right| x\right) + B \cdot x^{2-2c}{}_1F_1\left(\left.\begin{matrix} \frac{3}{2}-c \\ 3-2c \end{matrix}\right| x\right)$$

en vertu du théorème 6.1. Ceci implique $B = 0$, car

$$x \mapsto x^{2-2c} {}_1F_1\left(\left.\begin{matrix} \frac{3}{2} - c \\ 3 - 2c \end{matrix}\right| x\right)$$

n'est pas développable en série entière du fait que $2 - 2c \notin \mathbb{N}$. On obtient ensuite $A = 1$ en faisant $x = 0$. Ainsi, si $2c - 1 \notin \mathbb{Z}$, on a

$$y = {}_1F_1\left(\left.\begin{matrix} c - \frac{1}{2} \\ 2c - 1 \end{matrix}\right| x\right)$$

pour tout $x > 0$, et donc pour tout x réel car il s'agit d'une égalité entre deux séries entières de rayon de convergence infini. L'égalité demeure vraie si $c \notin \mathbb{Z}_-$ par continuité, ce qui démontre (6.20).

Remarque 6.1 En remplaçant $x^2/16$ par x dans (6.20), on voit que pour tout $x \geq 0$

$${}_0F_1\left(\left.\begin{matrix} \cdot \\ c \end{matrix}\right| x\right) = e^{-2\sqrt{x}} {}_1F_1\left(\left.\begin{matrix} c - \frac{1}{2} \\ 2c - 1 \end{matrix}\right| 4\sqrt{x}\right), \tag{6.23}$$

ce qui montre que la fonction ${}_0F_1$ s'exprime à l'aide de l'exponentielle et de la fonction ${}_1F_1$. Si $x \leq 0$ en effet, on peut écrire

$${}_0F_1\left(\left.\begin{matrix} \cdot \\ c \end{matrix}\right| x\right) = e^{-2i\sqrt{-x}} {}_1F_1\left(\left.\begin{matrix} c - \frac{1}{2} \\ 2c - 1 \end{matrix}\right| 4i\sqrt{-x}\right), \tag{6.24}$$

ce qui est tout à fait possible puisque la série entière qui définit ${}_1F_1$ a un rayon de convergence infini et par conséquent ${}_1F_1$ est en fait définie sur $\mathbb{C}$.

Exercices du chapitre 6

Exercice 6.1 Démontrer (6.10).

Exercice 6.2 Démontrer (6.12).

Exercice 6.3 Démontrer l'identité de Kummer (6.15).

Exercice 6.4 Démontrer les relations de contigüité (6.17).

Exercice 6.5 Démontrer que y_2 définie par (6.19) est solution de l'équation hypergéométrique confluente.

Exercice 6.6 On suppose que $c \notin \mathbb{Z}$. Démontrer que y_1 et y_2 définies par (6.19) et (6.20) sont linéairement indépendantes.

Exercice 6.7 Soit $(a, b, p) \in \mathbb{R}^3$, $q \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$p \cdot {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\middle| x\right) + {}_1F_1\left(\begin{matrix} a+1 \\ c \end{matrix}\middle| x\right) = (p+1) \cdot {}_2F_2\left(\begin{matrix} a, ap+a+1 \\ c, ap+a \end{matrix}\middle| x\right).$$

Exercice 6.8 Soient a et c deux paramètres réels, avec $a > 0$. On définit la *fonction de Tricomi* sur $]0, +\infty[$ par

$$T\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\middle| x\right) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} e^{-xt} dt, \tag{6.25}$$

c'est-à-dire comme la transformée de Laplace de $t \mapsto t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}$.
1) Prouver que la fonction de Tricomi est solution de (6.18) sur $]0, +\infty[$.
2) Toujours sous l'hypothèse $a > 0$, démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \left| {}_1\mathcal{F}_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\middle| x\right)\right| = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} T\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\middle| x\right) = 0.$$

En déduire la solution générale de (6.18) sur $]0, +\infty[$ lorsque $c \in \mathbb{Z}$ et $a > 0$.

Exercice 6.9 Soit ν un paramètre. Trouver la solution générale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2\nu y = 0. \tag{6.26}$$

(*équation d'Hermite*) grâce au changement de variable $t = x^2$.

Exercice 6.10 Soit $x \mapsto \operatorname{erf}(x)$ la fonction d'erreur. On appelle *fonction d'erreur complémentaire* la fonction $x \mapsto \operatorname{erfc}(x)$ définie pour tout x réel par

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt. \tag{6.27}$$

Démontrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right). \tag{6.28}$$

Exercice 6.11 Soit $x \mapsto \operatorname{erfc}(x)$ la *fonction d'erreur complémentaire* définie dans l'exercice précédent. Pour tout entier naturel n, on définit $\operatorname{erfc}_n(x)$ pour tout x réel par $\operatorname{erfc}_0(x) = \operatorname{erfc}(x)$ et

$$\operatorname{erfc}_{n+1}(x) = \int_x^{+\infty} \operatorname{erfc}_n(t)\, dt \quad (n \geq 0). \tag{6.29}$$

1) Prouver que

$$\operatorname{erfc}_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-t^2} dt \quad (n \geq 0). \tag{6.30}$$

En déduire que

$$\operatorname{erfc}_n(0) = \frac{1}{2^n \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}. \tag{6.31}$$

2) Montrer que $y = \operatorname{erfc}_n(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' - 2ny = 0 \tag{6.32}$$

et que la solution générale de (6.32) est $y = A \operatorname{erfc}_n(x) + B \operatorname{erfc}_n(-x)$.
3) Démontrer que

$$\operatorname{erfc}_n(x) = e^{-x^2} \left(\frac{2^{-n}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} {}_1F_1\left(\left. \begin{array}{c} \frac{n+1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right| x^2 \right) - \frac{2^{1-n}x}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} {}_1F_1\left(\left. \begin{array}{c} \frac{n+2}{2} \\ \frac{3}{2} \end{array} \right| x^2 \right) \right).$$

Exercice 6.12 On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *polynômes de Bessel* par

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k. \tag{6.33}$$

1) Démontrer que pour tout $x \neq 0$

$$y_n(x) = \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n {}_1F_1\left(\left. \begin{array}{c} -n \\ -2n \end{array} \right| \frac{2}{x} \right).$$

2) Démontrer que y_n vérifie la relation de récurrence

$$y_{n+2}(x) = (2n+3)\, x y_{n+1}(x) + y_n(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

et l'équation différentielle $x^2y'' + 2(x+1)y' - n(n+1)y = 0$.