Jour n^{o}16

Énoncé

Question de cours
Définir la loi hypergéométrique et donner l'espérance d'une variable suivant une loi hypergéométrique.

♦

On considère les trois équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\ \ y' - \frac{1}{4}y = \sin(2x),$$

$$(E_2)\ \ y' - \frac{1}{4}y = |\sin(2x)|,$$

$$(E_3)\ \ y' - \frac{1}{4}y = \max(\sin(2x), 0).$$

On note f, g et h les solutions respectives de (E_1), (E_2) et (E_3) s'annulant en 0.

1) a) Résoudre (E_1).
On pourra chercher une solution particulière du type $x \mapsto a\cos(2x) + b\sin(2x)$.

b) Déterminer la solution de (E_1) s'annulant en 0 et tracer sa courbe représentative.

2) Écrire un programme en Python permettant d'approcher sur $\mathbf{R}^+$ les solutions g et h des équations (E_2) et (E_3). *On pourra utiliser la méthode d'Euler.*

3) On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ \ y' - \frac{1}{4}y = u(x),$$

où u est une fonction continue et positive. Montrer alors que la solution particulière de (E) qui s'annule en 0 est positive sur $\mathbf{R}^+$. *On pourra utiliser la méthode de variation de la constante.*

4) Montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

5) Déterminer les limites de f, g et h en $+\infty$.

Analyse stratégique de l'énoncé

C'est un exercice sur les équations différentielles linéaires du premier ordre dans lequel il faudra programmer la méthode d'Euler.

1) a) Dans un premier temps, on résout l'équation homogène, puis on détermine une solution particulière de l'équation (E_1). On additionne alors les deux solutions obtenues pour obtenir la forme générale des solutions de (E_1).

$\hookrightarrow$ C'est une question classique qu'il faut savoir faire rapidement. Pour trouver la solution particulière, on utilise l'indication de l'énoncé.

b) On reprend la forme des solutions obtenues dans la première partie de la question et on détermine la valeur que doit prendre la constante pour que la solution s'annule en 0. On peut ensuite représenter la fonction en utilisant Python ou GeoGebra. Pour un tracé de courbe, on rappelle que le logiciel GeoGebra est le plus efficace.

$\hookrightarrow$ Question simple qui ne demande pas beaucoup de temps.

2) Il faut mettre en place la méthode d'Euler sur les équations (E_2) et (E_3).

$\hookrightarrow$ C'est un programme classique du cours. Il faut le programmer sans erreurs pour se démarquer des autres candidats.

3) C'est une question très abstraite. Il faut appliquer la méthode de variation de la constante à une fonction que l'on ne connait pas. Le résultat sera donc une fonction définie à partir d'une intégrale.

$\hookrightarrow$ C'est la question centrale de ce sujet. Il faut être capable d'expliquer la méthode de variation de la constante même si l'on n'arrive pas à aboutir au résultat demandé.

> Rapport du jury 2016
>
> La résolution des équations différentielles linéaire du premier ordre avec second membre n'est pas maîtrisée. Nombreux sont les candidats qui ne savent pas utiliser à bon escient la méthode de variation de la constante.

4) Pour démontrer l'inégalité, on réutilise l'expression intégrale obtenue dans la question précédente pour obtenir une expression de f, g et h. Il suffit ensuite de comparer les seconds membres et de « reconstruire » les fonctions.

$\hookrightarrow$ Si la question **3)** a été traitée sans problème, cette question ne représente aucune difficulté. Attention à bien justifier toutes les inégalités.

5) Il faut commencer par calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f. Le résultat et l'inégalité précédente permettent de répondre à la question.

$\hookrightarrow$ C'est une question relativement simple qui peut être traitée en ayant seulement traité la question **1)**.

Corrigé

Question de cours

Soit $N \in \mathbf{N}^*$, $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p (on note $q = 1 - p$) lorsque :

$$X(\Omega) = [\![\max(0, n - Nq), \min(n, Np)]\!],$$

et

$$\forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = \frac{\dbinom{Np}{k}\dbinom{Nq}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}.$$

De plus :

$$E(X) = np.$$

Remarque

La situation typique que l'on peut associer à cette loi est la suivante :
une urne contient N boules dont Np sont noires et Nq sont blanches. On tire simultanément n boules et on note X le nombre de boules noires obtenues. L'ensemble $X(\Omega)$ est délicat à mémoriser, il est important de savoir le retrouver en utilisant cet exemple.

♦

1) a) On commence par résoudre l'équation différentielle sans second membre :

$$y' - \frac{1}{4}y = 0.$$

La fonction $x \mapsto -x/4$ est une primitive de la fonction $x \mapsto -1/4$, alors les solutions de cette équation différentielle s'écrivent sous la forme :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ y_0(x) = C\mathrm{e}^{-(-x/4)} = C\mathrm{e}^{x/4},$$

où $C \in \mathbf{R}$ est une constante.
On cherche maintenant une solution particulière de l'équation avec second membre. Pour cela, comme le conseille l'énoncé, on cherche une solution sous la forme :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ y_1(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x),\ (a,b) \in \mathbf{R}^2.$$

Pour cela, on dérive la fonction y_1 :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ y_1'(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x).$$

On substitue cette expression dans l'équation (E_1), et on détermine les réels a et b pour que y_1 soit solution de (E_1) ; pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$y_1'(x) - \frac{1}{4}y_1(x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \left(-\frac{a}{4} + 2b\right)\cos(2x) + \left(-2a - \frac{b}{4} - 1\right)\sin(2x) = 0.$$

Or, dans l'espace vectoriel des fonctions, la famille $(x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x))$ est une famille libre. Ainsi, les réels a et b sont solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} -\dfrac{a}{4} + 2b = 0 \\ \\ -2a - \dfrac{b}{4} - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Après résolution, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{32}{65} \\ \\ b = -\dfrac{4}{65} \end{array}\right.$$

On obtient alors une solution particulière y_1 de l'équation différentielle (E_1) définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ y_1(x) = -\frac{32}{65}\cos(2x) - \frac{4}{65}\sin(2x).$$

Les solutions de (E_1) sont exactement les fonctions qui s'écrivent sous la forme $y_1 + h$ où h est une solution de l'équation homogène.

En conclusion, les solutions de (E_1) s'écrivent sous la forme :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ y(x) = C\mathrm{e}^{x/4} - \frac{32}{65}\cos(2x) - \frac{4}{65}\sin(2x),\ C \in \mathbf{R}.}$$

b) On cherche la constante C telle que $f(0) = 0$, soit :

$$C - \frac{32}{65} = 0.$$

On en déduit l'expression de la fonction f, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\boxed{f(x) = \frac{32}{65}\mathrm{e}^{x/4} - \frac{32}{65}\cos(2x) - \frac{4}{65}\sin(2x).}$$

On va maintenant représenter la fonction f en utilisant Python :

• On importe les modules `numpy` (pour utiliser les fonctions `linspace`, `sin` et `cos`) et `matplotlib.pyplot` (pour effectuer le tracé des fonctions) :

```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt
```

• On représente la fonction f :

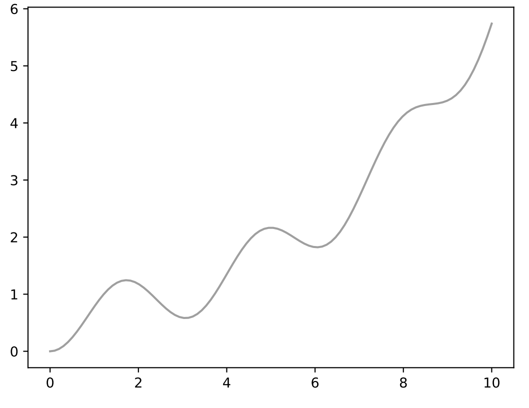
```
def dessin():
    # Liste contenant les abscisses des points que l'on va tracer
    x = linspace(0,10,100)

    # Liste contenant les ordonnées des points de la liste x
    y = 32/65*exp(x/4)-32/65*cos(2*x)-4/65*sin(2*x)

    # On trace la fonction
    plt.plot(x,y,color='grey')

    # On affiche la figure
    plt.show()
```

On obtient la représentation graphique suivante :



<u>Remarque</u>
On aurait pu utiliser le logiciel GeoGebra pour représenter cette fonction.

2) Commençons par rappeler brièvement le principe de la méthode d'Euler.
On considère un problème avec condition initiale sur un intervalle $I = [a, b]$:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

où y est la fonction inconnue, et f une fonction de $I \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
Le principe de la méthode d'Euler repose sur la relation suivante, pour un petit $h > 0$ et pour tout $t \in [a, b - h]$:

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

Ainsi :

$$y(t+h) \approx y(t) + hy'(t).$$

Remarque
C'est le début du développement de Taylor-Young de la fonction y à l'ordre 1 en t.

Soit :

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)).$$

La méthode d'Euler se détaille alors en deux étapes.
• On fixe le nombre de subdivisions $n \in \mathbf{N}^*$ de $[a, b]$ et on note :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ t_k = a + k\frac{(b-a)}{n}.$$

• On définit une suite finie $(y_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k).$$

Ainsi le terme de cette suite de rang k donnera une valeur approchée de $y(t_k)$.

• Voici une fonction qui programme la méthode d'Euler présentée ci-dessus :

```
def Euler(a,b,n,f,x0):
    # On initialise les différentes listes
    x = [a] # Abscisse initiale
    F = [x0] # Valeur initiale de la solution

    # On calcule la longueur des subdivis(ions
    h = (b-a)/n

    for i in range(1,n+1):
        # On détermine la liste des abscisses
        x = x + [h*i]

        # On applique la méthode d'Euler
        F = F + [F[i-1]+h*f(x[i],F[i-1])]

    # On retourne le vecteur des abscisses et des ordonnées
    return x,F
```

On va utiliser cette fonction pour résoudre les équations différentielles (E_2) et (E_3), pour cela remarquons que :

$$(E_2) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{4}y + |\sin(2x)|.$$

On a donc besoin de définir la fonction $F_2 : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{4}y + |\sin(2x)|$ avec le programme suivant :

```
def F2(x,y):
    return y/4+abs(sin(2*x))
```

De la même manière, on définit $F_3 : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{4}y + \max(\sin(2x), 0)$ pour résoudre (E_3) avec la méthode d'Euler :

```
def F3(x,y):
    return y/4+max(sin(2*x),0)
```

• Voici un programme qui permet de représenter les fonctions g et h et qui répond à la question :

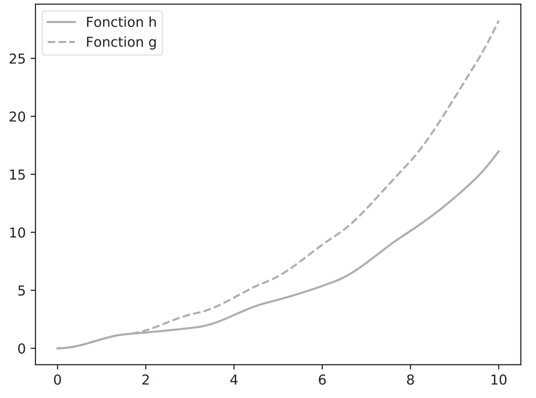
```
def dessin():
    # On détermine la fonction g
    x,G = Euler(0,10,100,F2,0)
    # On détermine la fonction h
    x,H = Euler(0,10,100,F3,0)

    # On représente la fonction g
    plt.plot(x,G,"--",color='grey', label='Fonction g')

    # On représente la fonction h
    plt.plot(x,H, color='grey', label='Fonction h')

    plt.legend()
    plt.show()
```

En exécutant la fonction `dessin()`, on obtient la figure suivante :



3) On considère l'équation différentielle :

$$(E) \;\; y' - \frac{1}{4}y = u(x),$$

où u est une fonction continue et positive. Pour déterminer une solution particulière de cette équation différentielle linéaire du premier ordre, on utilise la méthode de variation de la constante. On pose, pour tout x réel :

$$y(x) = C(x)\mathrm{e}^{x/4}, \text{ où } C \text{ est une fonction dérivable sur } \mathbf{R}.$$

On suppose que y est solution de l'équation différentielle. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$y'(x) = \frac{C(x)}{4}\mathrm{e}^{x/4} + C'(x)\mathrm{e}^{x/4}.$$

En substituant dans l'équation différentielle, on obtient, pour tout réel x :

$$C'(x)\mathrm{e}^{x/4} = u(x) \Leftrightarrow C'(x) = u(x)\mathrm{e}^{-x/4}.$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$C(x) = C(0) + \int_0^x u(t)\mathrm{e}^{-t/4}\mathrm{d}t.$$

La solution particulière que l'on obtient est alors :

$$y(x) = \left(C(0) + \int_0^x u(t)\mathrm{e}^{-t/4}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{x/4}.$$

On cherche la solution s'annulant en 0, on doit donc choisir $C(0) = 0$. Ainsi, pour tout x réel :

$$y(x) = \mathrm{e}^{x/4}\int_0^x u(t)\mathrm{e}^{-t/4}\mathrm{d}t = \int_0^x u(t)\mathrm{e}^{(x-t)/4}\mathrm{d}t.$$

On va maintenant montrer que cette solution est positive sur $\mathbf{R}^+$.
On sait que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$ et pour tout $t \in [0, x]$:

- $u(t) \geq 0$.
- $\mathrm{e}^{(x-t)/4} \geq 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}^+$ et pour tout $t \in [0, x]$:

$$u(t)\mathrm{e}^{(x-t)/4} \geq 0.$$

Donc, en intégrant de 0 à x avec x un réel positif, on obtient :

$$\int_0^x u(t)\mathrm{e}^{(x-t)/4}\mathrm{d}t \geq 0.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la solution de l'équation différentielle } (E) \text{ s'annulant en 0 est positive sur } \mathbf{R}^+.}$$

4) En reprenant les notations de la question **3)**, on sait que pour tout $x \geq 0$:

$$f(x) = \int_0^x \sin(2t)\mathrm{e}^{(x-t)/4}\mathrm{d}t.$$

$$g(x) = \int_0^x |\sin(2t)|\mathrm{e}^{(x-t)/4}\mathrm{d}t.$$

$$h(x) = \int_0^x \max(\sin(2t), 0)\mathrm{e}^{(x-t)/4}\mathrm{d}t.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, pour tout $t \in [0, x]$:

$$\sin(2t) \leq \max(\sin(2t), 0) \leq |\sin(2t)|.$$

En utilisant la positivité de la fonction exponentielle :

$$\sin(2t)\mathrm{e}^{(x-t)/4} \leq \max(\sin(2t), 0)\mathrm{e}^{(x-t)/4} \leq |\sin(2t)|\mathrm{e}^{(x-t)/4}.$$

On intègre ensuite sur t entre 0 et x, sachant que x est un réel positif :

$$\int_0^x \sin(2t)\mathrm{e}^{(x-t)/4}\mathrm{d}t \leq \int_0^x \max(\sin(2t), 0)\mathrm{e}^{(x-t)/4}\mathrm{d}t \leq \int_0^x |\sin(2t)|\mathrm{e}^{(x-t)/4}\mathrm{d}t.$$

En conclusion, pour tout réel x positif :

$$\boxed{f(x) \leq h(x) \leq g(x).}$$

Remarque

On pouvait traiter cette question en utilisant directement le résultat de la question **3)**. Pour cela, on remarque que la fonction $h - f$ est solution de l'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{4}y = \mathsf{max}(\sin(2x), 0) - \sin(2x).$$

De même, la fonction $g - h$ est solution de

$$y' - \frac{1}{4}y = |\sin(2x)| - \mathsf{max}(\sin(2x), 0).$$

Sachant que $\mathsf{max}(\sin(2x), 0) - \sin(2x) \geq 0$ et $|\sin(2x)| - \mathsf{max}(\sin(2x), 0) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, la question **3)** permet de conclure que pour tout $x \geq 0$:

$$h(x) - f(x) \geq 0 \text{ et } g(x) - h(x) \geq 0.$$

On en déduit alors l'encadrement recherché.

5) Commençons par déterminer la limite de la fonction f. Comme les fonctions sinus et cosinus sont majorées par 1 sur $\mathbf{R}$, alors :

$$-\frac{32}{65}\cos(2x) \geq -\frac{32}{65} \text{ et } -\frac{4}{65}\sin(2x) \geq -\frac{4}{65}.$$

$$f(x) = \frac{32}{65}\mathrm{e}^{x/4} - \frac{32}{65}\cos(2x) - \frac{4}{65}\sin(2x) \geq \frac{32}{65}\mathrm{e}^{x/4} - \frac{36}{65}.$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{32}{65}\mathrm{e}^{x/4} - \frac{36}{65} = +\infty.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

Ainsi par théorème de comparaison, en utilisant l'inégalité démontrée dans la question **4)** :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.}$$