13 – Temps de doublement d'un capital

On place 1000 euros au taux annuel de 2,25 %. A la fin de chaque année les intérêts sont ajoutés au capital pour constituer le capital de l'année suivante. Au bout de combien d'années ce capital aura-t-il au moins doublé ?

Avec un tableur

En entrant la formule =B1+2,25/100*B1 dans la cellule B2 puis en recopiant vers le bas on obtient

	A	**B**
1	0	1000,00
2	1	1022,50
3	2	1045,51
4	3	1069,03
5	4	1093,08
6	5	1117,68
7	6	1142,83
8	7	1168,54
9	8	1194,83
10	9	1221,71
11	10	1249,20
12	11	1277,31
13	12	1306,05
14	13	1335,44
15	14	1365,48
16	15	1396,21

17	16	1427,62
18	17	1459,74
19	18	1492,59
20	19	1526,17
21	20	1560,51
22	21	1595,62
23	22	1631,52
24	23	1668,23
25	24	1705,77
26	25	1744,15
27	26	1783,39
28	27	1823,52
29	28	1864,54
30	29	1906,50
31	30	1949,39
32	31	1993,25
33	32	2038,10

Le capital initial de 1000 euros aura au moins doublé au bout de 32 ans.

Avec un algorithme suivi d'un programme

$C \leftarrow 1000$

$N \leftarrow 0$

Tant que $C < 2000$

$\quad C \leftarrow C + \dfrac{2,25}{100} \times C$

$\quad N \leftarrow N + 1$

Fin de Tant que

Afficher N

CORRIGÉS

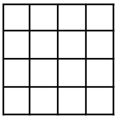
Programmes

Casio	Texas	Python
1000 → C	1000 → C	`c=1000`
0 → N	0 → N	`n=0`
While C < 2000	While C < 2000	`while c<2000:`
C + 2,25/100 × C → C	C + 2,25/100 × C → C	`  c=c+2.25/100*c`
N + 1 → N	N + 1 → N	`  n=n+1`
WhileEnd	End	`print (n)`
N ◢	Disp N	

14 – Nombre de carrés visibles dans un quadrillage

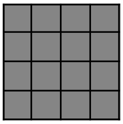
On considère un quadrillage constitué de carrés de même dimension.

1. Montrer que dans le quadrillage ci-dessous, de taille 4, il y a 30 carrés visibles.

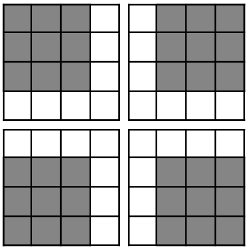


On dénombre

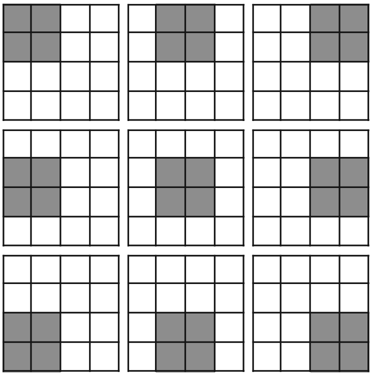
1×1 carré de taille 4.



2×2 carrés de taille 3.



3×3 carrés de taille 2.



4×4 carrés de taille 1.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Il y a $1 + 4 + 9 + 16$ soit 30 carrés visibles dans ce quadrillage de taille 4.

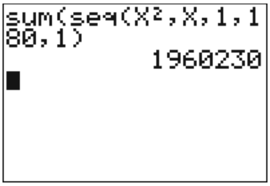
2. Exprimer le nombre de carrés visibles dans un quadrillage de taille 180.
En généralisant, à bon droit, le dénombrement précédent obtenu par glissements successifs, on obtient

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 178^2 + 179^2 + 180^2.$$

3. Utiliser différents moyens de calculs pour calculer ce nombre.

Avec une calculatrice

Une calculatrice Texas donne le nombre cherché en entrant



Une calculatrice Casio donne le nombre cherché en entrant

$$\sum(X^2, X, 1, 180).$$

Avec un tableur

	A	B
1	1	1
2	2	4
3	3	9
.	.	.
.	.	.
.	.	.
178	178	31684
179	179	32041
180	180	32400
181		1960230

A1 : 1.
A2 : =A1+1 à recopier vers le bas jusqu'à la cellule A180.
B1 : =A1*A1 à recopier vers le bas jusqu'à la cellule B180.
B181 : =SOMME(B1:B180).

Avec un algorithme suivi d'un programme

S ← 0
Pour I allant de 1 à 180
  S ← S + I × I
Fin de Pour
Afficher S

Programmes

Casio	Texas	Python
0 → S	0 → S	`s=0`
For 1 → I To 180	For (I, 1, 180)	`for k in range(1,181,1):`
S + I × I → S	S + I × I → S	`    s=s+k*k`
Next	End	`print (s)`
S ◢	Disp S	

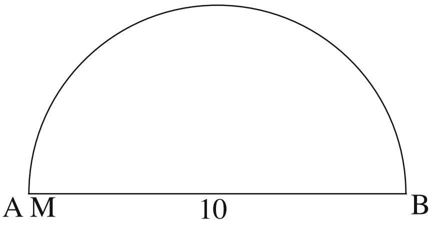
Calcul littéral

15 – Le kangourou

Soit [AB] un segment de longueur 10 et M un point du segment [AB] tel que AM = x. Le but de l'exercice est d'étudier la longueur ℓ du « trajet A-M-B » obtenu en parcourant le demi-cercle de diamètre [AM] puis le demi-cercle de diamètre [MB].

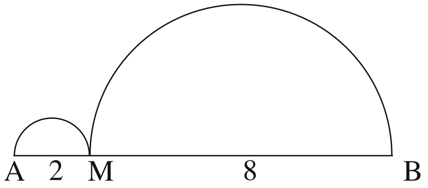
1. Faire une figure et calculer la valeur de ℓ pour $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ et $x = 6$.

$x = 0$



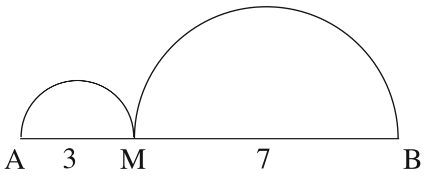
$$\ell = \frac{10\pi}{2} = 5\pi$$

$x = 2$



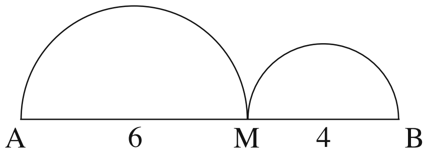
$$\ell = \frac{2\pi}{2} + \frac{8\pi}{2} = 5\pi$$

$x = 3$



$$\ell = \frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{2} = 5\pi$$

$x = 6$



$$\ell = \frac{6\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = 5\pi$$

2. Émettre une conjecture : pour tout x compris entre 0 et 10, $\ell = 5\pi$.

3. Démontrer votre conjecture.

$$\ell = \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi(10 - x)}{2} = \frac{\pi x + 10\pi - \pi x}{2} = \frac{10\pi}{2} = 5\pi.$$

Remarque

Si le kangourou fait plus de deux bonds, on peut démontrer que la longueur du trajet est encore égale à 5π.

16 – Comparaison de deux expressions

Soit A = $\dfrac{n^3+1}{n+1}$ et B = $n^2 - n + 1$.

1. On souhaite comparer, pour tout n entier naturel, A et B.

a. Calculer A et B pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Par calcul mental on obtient

n	A	B
0	1	1
1	1	1
2	3	3
3	7	7

b. Que pouvez-vous conjecturer ?

On peut conjecturer que pour tout n entier naturel, A = B.

c. Prouver votre conjecture.

$(n + 1)(n^2 - n + 1) = n^3 - n^2 + n + n^2 - n + 1 = n^3 + 1$. Or pour tout n entier naturel, $n + 1$ est non nul donc $n^2 - n + 1 = \dfrac{n^3+1}{n+1}$ donc B = A.

Première variante

$$A - B = \frac{n^3+1-(n^2-n+1)(n+1)}{n+1} = \frac{n^3+1-n^3-n^2+n^2+n-n-1}{n+1} = 0.$$

On en déduit que pour tout n entier naturel, B = A.

Deuxième variante

$n + 1$ est non nul donc B = $\dfrac{(n^2-n+1)(n+1)}{n+1} = \dfrac{n^3+n^2-n^2-n+n+1}{n+1}$ = A.

2. Pour tout n entier, A et B sont-ils égaux ?

Pour $n = -1$, A n'existe pas donc, pour tout n entier, A n'est pas égal à B.

Remarque : la démonstration située en 1. c. prouve que pour tout n réel différent de – 1, A = B.

17 – Puissances

Soit n un entier naturel et A, B, C trois nombres définis par

$$A = \frac{\left(8^{n+1}+8^{n}\right)^{2}}{\left(4^{n}-4^{n-1}\right)^{3}} \; ; B = 1^{n} + 5^{n} + 9^{n} + 17^{n} + 18^{n} \; ; C = 2^{n} + 3^{n} + 11^{n} + 15^{n} + 19^{n}.$$

1. Calculer A, B et C pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Par calcul mental pour $n = 0$, $n = 1$ et avec une calculatrice pour $n = 2$, $n = 3$, on obtient

n	A	B	C
0	192	5	5
1	192	50	50
2	192	720	720
3	192	11600	11600

2. Émettre deux conjectures.

Pour tout n entier naturel, A = 192 et B = C.

3. Prouver ou réfuter vos deux conjectures.

$$A = \frac{\left(8^{n+1}+8^{n}\right)^{2}}{\left(4^{n}-4^{n-1}\right)^{3}} = \frac{\left[8^{n}(8+1)\right]^{2}}{\left[4^{n}\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]^{3}} = \frac{8^{n}\times 8^{n}\times 9\times 9}{4^{n}\times 4^{n}\times 4^{n}\times \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}$$

$$A = \frac{64^{n}\times 9\times 9\times 4\times 4\times 4}{64^{n}\times 3\times 3\times 3} = 3 \times 64 = 192.$$

La première conjecture est démontrée. Pour tout n entier naturel, A est égal à 192.

Pour $n = 5$, B = 3 371 600 et C = 3 396 800 donc la deuxième conjecture est fausse. Pour tout n entier naturel, B n'est pas égal à C.

Remarque : pour $n = 4$, B = C.

18 – $(a+b)^3$

1. En s'inspirant de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ un élève propose $a^3 + 3ab + b^3$ comme résultat de $(a+b)^3$. Prouver que cet élève a émis une conjecture fausse.

Pour démontrer que $(a+b)^3$ n'est pas égal à $a^3 + 3ab + b^3$ il suffit de trouver un contre-exemple. $(1+1)^3 = 2^3 = 8$ mais $1^3 + 3 \times 1 \times 1 + 1^3 = 1 + 3 + 1 = 5$ donc cet élève a émis une conjecture fausse.

2. Un autre élève propose $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ comme résultat de $(a+b)^3$. Prouver que cet élève a raison.

$(a+b)^3 = (a+b) \times (a+b)^2$

$(a+b)^3 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

3. Développer $(2x+5)^3$ puis développer $(x-2)^3$ et enfin calculer $(4+6)^3$.

$(2x+5)^3 =$

$$(2x)^3 + 3 \times (2x)^2 \times 5 + 3 \times 2x \times 5^2 + 5^3 = 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125.$$

$(x-2)^3 =$

$$(x+(-2))^3 = x^3 + 3x^2 \times (-2) + 3x \times (-2)^2 + (-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8.$$

$(4+6)^3 = 10^3 = 1000.$

19 – Produits d'entiers consécutifs

1. Montrer que, pour tout n entier, $n^2 - n$ est le produit de deux entiers consécutifs.

$n^2 - n = n(n-1)$. Or n et $n-1$ sont deux entiers consécutifs donc pour tout n entier, $n^2 - n$ est le produit de deux entiers consécutifs.

2. Pour tout n entier, $n^3 - n$ est-il le produit de trois entiers consécutifs ?

$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$. Or $n-1$, n et $n+1$ sont trois entiers consécutifs donc pour tout n entier, $n^3 - n$ est le produit de trois entiers consécutifs.