Chapitre 4

Energétique

1. L'énergie

1.1. Tentative d'une définition de l'énergie, du travouil

● Energie

Unité d'énergie : le joule symbole est [J]

- Un objet possède de l'énergie, s'il est capable de déplacer un autre objet que lui-même.
- Il existe un grand nombre de formes d'énergie. On les a classées en deux catégories :
  _ L'énergie cinétique liée à la vitesse.
  _ Les autres sont appelées les énergies potentielles.
  Ce sont des formes d'énergie qui peuvent être stockées sans que les objets soient en mouvement. En mécanique on en rencontre essentiellement deux formes :
  ◊ L'énergie de pesanteur, liée à la position d'un objet par rapport au sol.
  ◊ L'énergie élastique.

● La notion du travail d'une force

Introduction

Lorsqu'un objet se déplace, il possède de l'énergie cinétique. Lorsqu'il accélère, son énergie cinétique augmente, lorsqu'il ralentit, elle diminue. S'il se déplace à vitesse constante, l'énergie cinétique ne varie pas. Toute force appliquée sur le solide, et agissant sur le mouvement participe à la variation de cette forme d'énergie. Cette participation s'appelle le travail de la force. Si l'objet est soumis à plusieurs forces, il se peut que leurs effets, leurs travaux, se compensent et la variation de son énergie sera nulle.

Définition

On appelle travail d'une force appliquée à un solide, la quantité d'énergie cinétique que reçoit ou que perd le solide sous l'action de cette force.

Unité du travail : le joule [J]

Unité : le joule

1.2. Travail d'une force constante dans le cas d'un solide en translation rectiligne

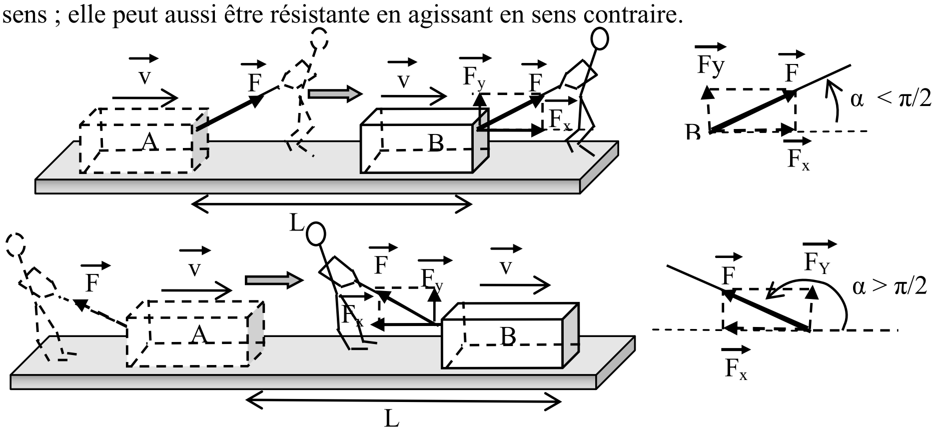
● Définition

Force constante

Une force est constante lorsque sa direction, son sens et son intensité restent invariables au cours du temps.

Observation

On a vu que seule la composante, $\vec{F_x}$, d'intensité F_x, d'une force dans la direction du déplacement agit sur le mouvement de l'objet étudié. Elle peut le favoriser en agissant dans son sens ; elle peut aussi être résistante en agissant en sens contraire.



Définition

Soit un objet se déplaçant d'un point A à un point B, sur une distance L. Le travail, noté $(W_{A\to B})_F$, de la force $\vec{F}$ à laquelle il est soumis a pour expression : $(W_{A\to B})_F = \pm F_x.\times L$

$$\boxed{(W_{A\to B})_F = \pm F_x \times L}$$

Observation

Si la force $\vec{F}$ est motrice $(W_{A\to B})_F = + F_x \times L$. Le solide reçoit de l'énergie cinétique par son intermédiaire.

Si la force $\vec{F}$ est résistante $(W_{A\to B})_F = - F_x \times L$. Le solide cède de l'énergie cinétique par son intermédiaire.

Si la force $\vec{F}$ est perpendiculaire au déplacement, elle est sans effet sur le mouvement. Son travail est nul :$(W_{A\to B})_F = 0$.

Autre expression possible

On peut remplacer l'expression $\pm F_x$ par la grandeur algébrique $F\cos\alpha$ avec F l'intensité de la force $\vec{F}$.

_ En effet si la force est motrice on écrit dans la relation $+ F_x$.
  Comme $0 < \alpha < \pi/2$ donc $\cos\alpha > 0$ et donc $+ F_x = F\cos\alpha$

_ Si la force est résistante on écrit dans la relation $-F_x$.
  Comme $\alpha > \pi/2$, $\cos\alpha < 0$ et donc $-F_x = F\cos\alpha$.

_ Donc dans tout les cas : $\pm F_x = F\cos\alpha$.

$$\boxed{\pm F_x = F\cos\alpha}$$

Donc le travail de la force F a pour expression : $(W_{A\to B})_F = F\times\cos\alpha \times L$

Conséquence

_ Si la force est motrice : $0 < \alpha < \pi/2$ et $\cos\alpha > 0$ $(W_{A\to B})_F > 0$.

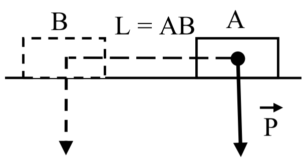
_ Si la force est résistante : $\alpha > \pi/2$, $\cos\alpha < 0$ $(W_{A\to B})_F < 0$..

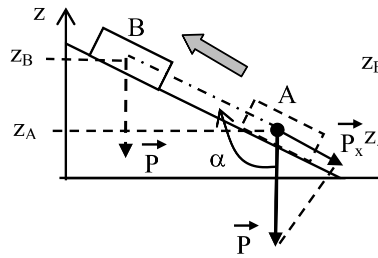
_ Si la force est perpendiculaire au déplacement : $\alpha = \pi/2$, $\cos\alpha = 0$. et $(W_{A\to B})_F = 0$.

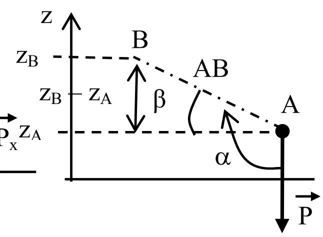
$(W_{A\to B})_F = F\times\cos\alpha \times L$; unité : le joule [J]
α est l'angle entre la direction de la force et le sens du déplacement

● Le cas particulier : travail du poids d’un solide

Le poids « ne travaille » que s’il y a changement d’altitude.







Expression du travail

_ On peut utiliser la 2° relation de définition du travail.

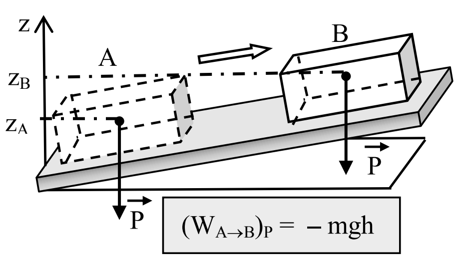
$(W_{A \to B})_P = P \times \cos\alpha \times AB$ avec $\cos\alpha = \cos[\beta + \pi/2] = -\sin\beta$.

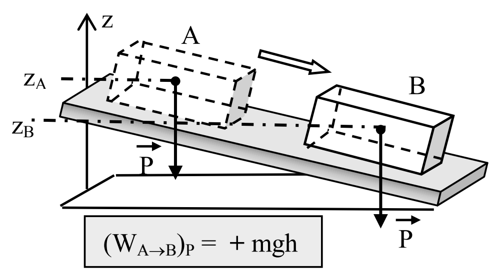
D’après la figure : $\sin\beta = (z_B - z_A) / AB$. Donc $(W_{A \to B})_P = -P \times (z_B - z_A) = +P \times (z_A - z_B)$.

_ On introduit a différence de hauteur h, sachant que $z_{initiale} - z_{finale} = \pm h$.

$(W_{A \to B})_P = mg \times (z_A - z_B)$

z_A altitude de départ et z_B altitude d’arrivée

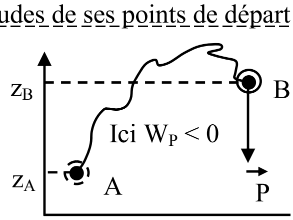


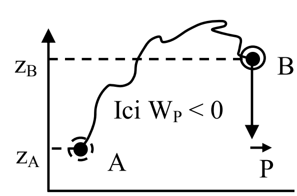


Le poids « ne travaille » que s’il y a une différence d’altitude

Généralisation

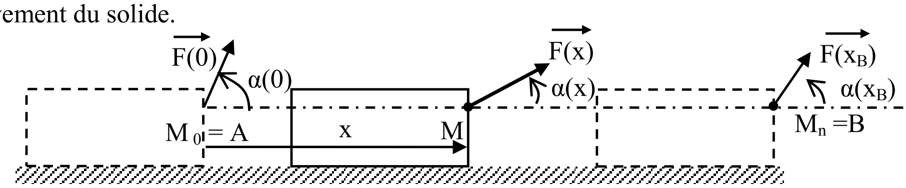
On montre que la relation précédente est tout-à-fait générale : le travail du poids ne dépend que des altitudes de ses points de départ et d’arrivée.





1.3. Travail d’une force qui change au cours du déplacement

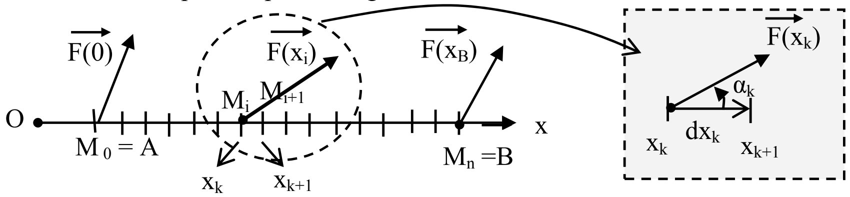
Une force varie si l’une de ses caractéristiques, direction, sens, intensité change au cours du mouvement du solide.



● **Expression du travail**

Principe de l'étude

On décompose la trajectoire du point d'application de la force, donc du solide, en segments suffisamment petits pour que la force puisse être considérée comme constante au cours du déplacement sur l'un quelconque des segments.



Pour le déplacement infiniment petit, dx_k tel que $dx_k = x_{k+1} - x_k$, le travail infiniment petit noté δW_k, de la force, a pour expression : $\delta W_k = F(x_k)\cos\alpha_k dx_k$.

Expression du travail

Pour le déplacement L, le travail de la force est la somme de tous les travaux élémentaires. Comme la somme contient un nombre infiniment grand de termes, l'expression du travail s'écrit sous la forme d'une intégrale (on a enlevé l'indice « k ») :

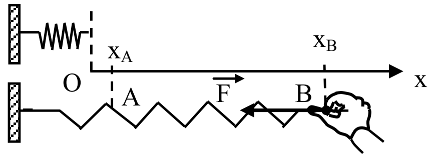
$$(W_{A\to B})_F = \sum_{k=0}^{n} \delta W_k = \int_A^B F(x)\cos\alpha(x)dx .$$

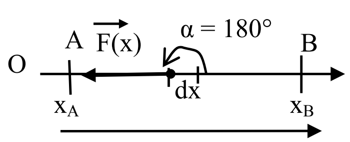
Dans la suite, on partira toujours de l'expression du travail élémentaire de la force $\vec{F}$ pour un déplacement dx : $\delta W = F(x)\cos\alpha(x)dx$ avec F(x) l'intensité de la force F et x la position de son point d'application. Puis on recherchera le travail e travail pour un déplacement de A vers B : en effectuant l'intégrale : $(W_{A\to B})_F = \int_A^B F(x)\cos\alpha(x)dx$.

$$\boxed{\delta W = F(x)\cos\alpha(x)dx} \qquad \boxed{(W_{A\to B})_F = \int_A^B F(x)\cos\alpha(x)dx}$$

● **Exemples**

Exemple n°1 e cas de la force élastique exercée par d'un ressort.





L'intensité de la force est proportionnelle à l'allongement : F = kx ; elle n'est pas constante au cours du mouvement. Si le ressort se dilate d'une position A à une position B :

$\delta W = F(x)\cos\alpha dx$ avec l'angle $\alpha = 180°$ et $\cos 180° = -1$.

$$\delta W = -F(x)dx = -kxdx \; ; \; (W_{A\to B})_F = \int_{x_B}^{x_A} -kxdx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2}(x_A^2 - x_B^2)$$

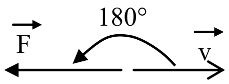
Généralisation : point de départ A, point d'arrivée B

Qu'il y ait dilatation ou compression le travail a pour expression : $(W_{A\to B})_F = ½\, k\, (x_A^2 - x_B^2)$.

Exemple n°2 : Le cas d'une force dépendant de la vitesse

On prend le cas des forces de frottement fluide

Lorsqu'un solide se déplace dans l'air, il est soumis à une force résistance due à l'air qui s'oppose à son mouvement et dont l'intensité est proportionnelle au carré de sa vitesse : $F = k v^2$.



_ Expression général du travail

◊ Travail élémentaire : $\delta W = Fdx = -\ k\ v^2dx$. La vitesse v a pour expression : $v = \dfrac{dx(t)}{dt}$. On en déduit que $dx(t) = dx = vdt$ et que $\delta W = -\ k\ v^3dt$.

◊ Travail total : $W = \int_A^B F(x)\cos\alpha(x)dx\ = \int_A^B -kv^3dt = \int_{t_A}^{t_B} -kv^3dt$.

_ Le travail des forces de frottement dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré, donc lorsque $v = a\ t$, entre les instants $t_A = 0$ et $t_B = t$ quelconque :

$W = \int_{t_A}^{t_B} -kv^3dt = \int_0^t -ka^3t^3dt = -\ ka^3\ \dfrac{t^3}{3}$.

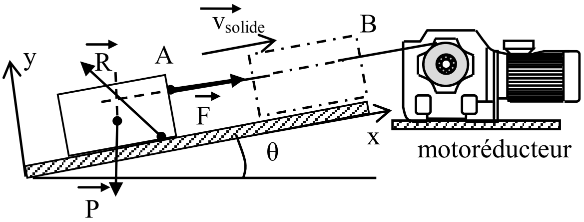
1.4. Le travail total des forces appliquées à un solide en translation

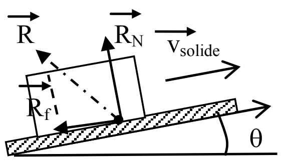
● **Définition**

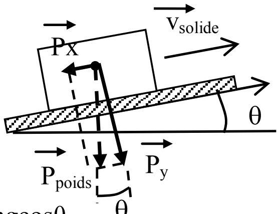
Le travail total est la somme des travaux des forces appliquées sur le solide.

$$(W_{A\rightarrow B})_{total} = \sum_{i=1}^{n} (W_{A\ \rightarrow\ B})(F_i)$$

● **Etude d'un exemple**







Etude

$(W_{A\rightarrow B})_{total}\ = W_F + W_R + W_P$

$W_F = +\ F\times L$, $W_R = W_{Rf} = -\ R_f\times L$ avec $R_f = \mu R_N$ et $R_N = P_y = mg\cos\theta$

$W_P = W_{Px} = -\ P_x \times L$ avec $P_x = P\sin\theta = mg\sin\theta$

$(W_{A\rightarrow B})_{total}\ = (F - P_x - R_f)\times L$, donc $(W_{A\rightarrow B})_{total}\ = [F - mg(\mu\cos\theta + \sin\theta)]\times L$

Autre expression du travail total

$(W_{A\rightarrow B})_{total} = \int_{A_0}^{B_0} \pm F_{x1}dx + \int_{A_0}^{B_0} \pm F_{x2}dx + \ldots + \int_{A_0}^{B_0} \pm F_{xi}dx\ldots\ldots + \int_{A_0}^{B_0} \pm F_{xn}dx$.

$(W_{A\rightarrow B})_{total} = \int_{A_0}^{B_0} (\pm F_{x1} \pm F_{x2} \pm \ldots\ldots \pm F_{xi} + \ldots. + F_{xn})dx$.

$(W_{A\rightarrow B})_{total} = \int_{A_0}^{B_0} (\sum \pm F_{xi})dx$. Or on a vu que $\sum \pm F_{xi} = ma_x$.

Donc $(W_{A\rightarrow B})_{total}\ = \int_{A_0}^{B_0} ma_xdx$. Comme la masse du solide est constante, on peut aussi écrire : $(W_{A\rightarrow B})_{total}\ m\int_{A_0}^{B_0} a_xdx$.

$$(W_{A\rightarrow B})_{total} = m\int_A^B a_xdx$$

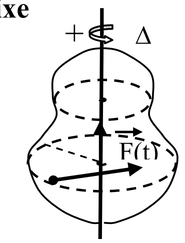
● **Application**

Un véhicule de masse 100 kg est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération $a = 0{,}1\ m/s^2$.

Question : Déterminer le travail total mise en jeu lorsqu'il aura parcouru 10 m.

Réponse : $(W_{A\rightarrow B})_{total} = m\int_A^B a_xdx = ma\ (x - x_0) = 100 \times 0{,}1\times 10 = 100$ J.

1.5. Travail dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe



● Travail d'une force

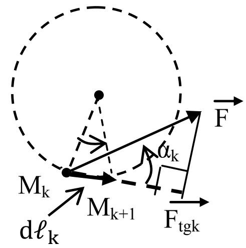
L'expression du travail est du même type que précédemment, sachant que la direction de la force change au cours du temps.

<u>Le travail élémentaire</u>

Soit un point M du solide auquel s'applique une force $\vec{F}$. Ce point a une trajectoire circulaire. On décompose sa trajectoire en éléments suffisamment petits :

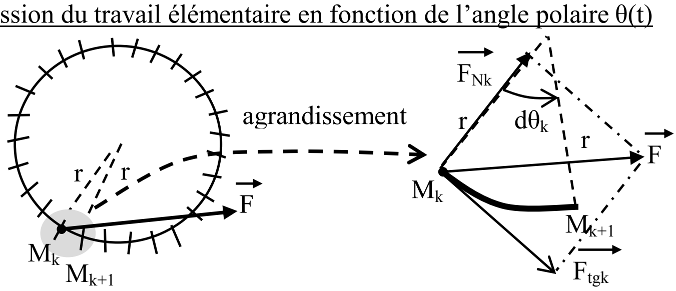
_ pour qu'ils puissent tous être considérés comme des segments de droite : $\widehat{M_kM_{k+1}} = d\boldsymbol{\ell_k}$ infiniment petit.

_ pour qu'au cours du déplacement sur l'un des segments, la force puisse être considérée comme constante.



Le travail élémentaire δW_k de la force $\vec{F_k}$ pour le déplacement de M_k à M_{k+1} a pour expression : $\delta W_k = \pm F_{tgk}\, d\ell_k$, avec F_{tgk} est l'intensité de la composante tangentielle de la force lorsque le point m du solide est à la position M_k.

<u>Expression du travail élémentaire en fonction de l'angle polaire θ(t)</u>



La relation liant un arc de cercle à l'angle polaire est : $\widehat{MM'} = r\theta$, avec r le rayon de la trajectoire du point M. Dans notre cas, $\widehat{M_kM_{k+1}}$ est un arc de cercle infiniment petit, donc l'angle polaire qui le caractérise, l'est aussi ; on le note $d\theta_k$. Ainsi : $M_kM_{k+1} = d\ell_k = r d\theta_k$.

<u>Conséquence</u> : $\delta W_k = \pm F_{tgk}\, d\ell_k = \pm F_{tgk}\, r d\theta_k$.

<u>Expression du travail élémentaire en fonction du moment de la force $\vec{F}$</u>

La grandeur rF_{tgk} représente la valeur du le moment de la force $\vec{F}$ lorsque le point M du solide est à la position M_k : $M_{F/\Delta} = rF_{tgk}$. On en déduit l'expression du travail élémentaire de $\vec{F}$ est : $\delta W_k = \pm M_{F/\Delta} d\theta_k$.

<u>Travail de la force $\vec{F}$ pour un déplacement angulaire quelconque</u>

$(W_{\theta A \to \theta B})_F = \sum_{k=0}^{n} dW_k = \sum_{k=0}^{n} rF_k$. Comme cette somme possède un infiniment grand nombre de termes, elle est une intégrale, $(W_{\theta A \to \theta B})_F = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \delta W$.

On enlève indice « k ». $(W_{\theta A \to \theta B})_F = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \pm M_{F/\Delta} d\theta$.avec $\delta W = \pm M_{F/\Delta} d\theta$.

$$\boxed{\delta W = \pm M_{F/\Delta} d\theta} \qquad \boxed{(W_{\theta A \to \theta B})_F = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \pm M_{F/\Delta} d\theta}$$

● Travail d'une force d'un couple de forces

Expression générale

L'expression précédente reste valable pour un couple de forces sachant que le travail d'un ensemble de deux forces est égal à la somme des travaux de chacune des forces. Or dans un couple de forces, les deux forces agissent dans le même sens, donc :

$\delta W_{(F,F')} = M_{F/\Delta}\, d\theta + M_{F'/\Delta}\, d\theta = [M_{F/\Delta} + M_{F'/\Delta}]d\theta = M_{(F,F')/\Delta}d\theta$.

$M_{F/\Delta} = M_{F'/\Delta} = F_{tg}r$. Donc $[M_{F/\Delta} + M_{F'/\Delta}] = 2rF_{tg} = F_{tg}d = M_{(F,F')/\Delta}$.

$\boxed{\delta W = \pm M_{(F,F')}d\theta}$ $\boxed{(W_{\theta A\to\theta B})_F = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \pm M_{F,F'/\Delta}d\theta}$

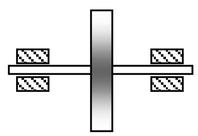
Le cas d'une force ou d'un couple de forces d'intensité constante

Si $M_{F/\Delta}$ = constante alors $(W_{\theta A\to\theta B})_F = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \pm M_{F/\Delta}d\theta = \pm M_{F/\Delta}(\theta_B - \theta_A)$.

$\boxed{\text{Si } M_{F/\Delta} = \text{constante, } (W_{\theta A\to\theta B})_F = \pm M_{F/\Delta}(\theta_B - \theta_A)}$

Application

Un volant de rayon r = 30 cm, de masse m = 10 kg ayant une vitesse initiale de 1000 tr/mn met 10s pour s'arrêter.



▪ Questions

Sachant que sa décélération est uniformément varié, déterminer :
1. La valeur du moment des forces de frottement que l'on supposera constant.
2. Le travail des forces de frottement.

▪ Réponses

1. Relation fondamentale de la dynamique

$J_\Delta\alpha(t) = -M_{frottement}$ avec $= \alpha(t) = \alpha_0$ = constante.

$\Omega(t) = \alpha_0\, t + \Omega_0$, Ω_0 : vitesse initiale est nulle. A t = 10 s, $\Omega(t) = 0$.

Donc $\alpha_0 = -\Omega_0 / t$ et $\Omega_0 = 2\pi\, n / 60 = 104{,}7$ rad/s. Ainsi $\alpha_0 = -10{,}5$ rad/s^2.

Le moment d'inertie du volant : $J_\Delta = ½\, mr^2 = 0{,}5 \times 10 \times (0{,}3)^2 = 0{,}45$ kgm^2.

$M_{frottement} = -J_\Delta\alpha_0 = -0{,}45 \times 10{,}5 = 4{,}71$ Nm.

2. $W_{forces\ de\ frottement} = -M_{frottement}(\theta_2 - \theta_1)$, les forces de frottement sont résistantes.

On utilise la relation générale : $\Omega^2 - \Omega_0^2 = 2\alpha_0(\theta - \theta_0)$ avec $(\theta_2 - \theta_1) = (\theta - \theta_0)$.

$\Omega^2 - \Omega_0^2 = 2\alpha_0(\theta - \theta_0)$ s'écrit $-\Omega_0^2 = 2\alpha_0(\theta - \theta_0)$ donc $(\theta - \theta_0) = -\Omega_0^2/(2\alpha_0)$.

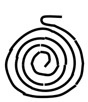
$(\theta - \theta_0) = -104{,}7^2/(-2\times 10{,}5) = 523{,}5$ rad.

$W_{forces\ de\ frottement} = -M_{frottementt}(\theta_2 - \theta_1) = -4{,}71 \times 523{,}5 = -2522$ J.

● Le cas d'une force ou d'un couple de forces dont l'intensité varie

Moment dépendant de la position : le ressort hélicoïdal

▪ Question

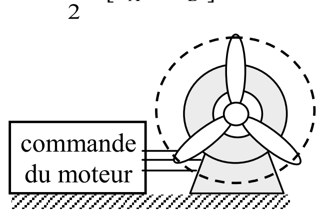


Déterminer la valeur du travail de la force élastique exercée par un ressort hélicoïdal, sachant que son moment a pour expression : $M_{élastique} = C\theta$. Comme la force est résistante, on écrira $-M_{élastique}$.

▪ Réponse : $(W_{\theta A\to\theta B})_{Félastique} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} -M_{Félastique}d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} -C\theta d\theta = \frac{1}{2}C[\theta_A^2 - \theta_B^2]$.

Moment dépendant de la vitesse : le ventilateur

L'air exerce sur les pâles d'un ventilateur un couple de forces résistantes de moment : $M_{air} = k\Omega^2$. Dans ces conditions, pour déterminer l'énergie cédée par le ventilateur à l'air, il est plus facile de remplacer $d\theta$ par Ωdt



car $\frac{d\theta(t)}{dt} = \Omega(t)$ et de connaître la fonction $\Omega = f(t)$. $W_{air} = \int_{\theta_0}^{\theta} -M_{air} d\theta = -\int_{t_0}^{t} M_{air}\Omega(t)dt$

$W_{air} = -\int_{t_0}^{t} k\Omega^3(t)dt$.

Exemple

La montée en vitesse du ventilateur se fait linéairement en 3s de la vitesse nulle à la vitesse de 1500 tr/mn puis elle reste constante,

▪ Question

Sachant que $k = 0{,}02$ Nms^2/rad. Déterminer :

1. L'énergie cédée pr le ventilateur à l'air pendant la phase d'accélération.
2. L'énergie céde par le ventilateur à l'air pendant 10 s.

▪ Question :

1. Pendant la phase d'accélération : $\Omega(t) = \alpha t$ avec $\alpha = 157/3 = 52{,}4$ rad/s^2. A la vitesse de 1500 tr/mn correspond la vitesse de $2\pi\times1500/60 = 157$ rad/s, donc $\Omega(t) = 52{,}4\times t$.

$W_{air} = -\int_{t_0}^{t} k\Omega^3(t)dt = -\int_{t_0}^{t} k\alpha^3 t^3 dt \int_{t_0}^{t_1} -k\alpha^3 t^3 dt = -\frac{k\alpha^3}{4}(t_1^4 - t_0^4)$. $t_1 = 3s$ et $t_0 = 0$, ainsi, $W_{air} = -19{,}4$ kJ.

2. Au-delà des 3s, la vitesse est constante, $W_{air}' = -\int_{t_0}^{t} k\Omega^3(t)dt = -k\Omega^3(t_2 - t_1)$;

$(t_2 - t_1) = (10 - 3) = 7s$; $W_{air}' = -5{,}95$ MJ.

L'énergie totale consommée est la somme des deux énergies calculées.

● **Le travail total des forces appliquées sur un solide en rotation**

Définition : $(W_{\theta A\to\theta B})_{total} = \sum_{i=1}^{n}(W_{A\to B})(F_i)$

Expression en fonction de l'accélération angulaire

$(W_{A\to B})_{total} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \pm M_{F1/\Delta} d\theta + \ldots + \int_{\theta_B}^{\theta_B} \pm M_{Fi/\Delta} d\theta \ldots\ldots + \int_{\theta_A}^{\theta_B} \pm M_{Fn/\Delta} d\theta$.

$(W_{A\to B})_{total} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} (\sum \pm M_{Fi/\Delta}) d\theta$. Or on a vu que $\sum \pm F_{xi} = ma_x$.

On a vu que $\pm M_{F1/\Delta} \pm M_{F2/\Delta} \pm \ldots \pm M_{Fk/\Delta} \ldots \pm M_{(F,F')/\Delta} = J_\Delta \alpha(t)$.

Donc $(W_{A\to B})_{total} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} J_\Delta \alpha(t) d\theta$. .Comme les solides étusdiés auront une inertie constante, on paut écrire : $(W_{A\to B})_{total} = J_\Delta \int_{\theta_A}^{\theta_B} \alpha(t) d\theta$.

$$\boxed{(W_{A\to B})_{total} = J_\Delta \int_{\theta_A}^{\theta_B} \alpha(t) d\theta}$$

$$\boxed{(W_{\theta A\to\theta B})_{total} = \sum_{i=1}^{n}(W_{A\to B})(F_i)}$$