4 Le logarithme népérien des nombres réels strictement positifs

1. Définition du logarithme népérien

Si $b = e^a$, alors a s'appelle le logarithme (népérien) de b, noté $a = \ln(b)$.

$$a \text{ réel quelconque } \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} b \text{ réel strictement positif quelconque}$$

On dit que le logarithme et l'exponentielle sont des fonctions réciproques.

Valeurs particulières : $\begin{cases} 1 = e^0 & \Rightarrow & 0 = \ln(1) \\ e = e^1 & \Rightarrow & 1 = \ln(e) \end{cases}$.

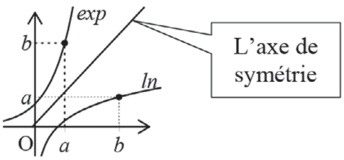
Premières formules

Pour a quelconque et b strictement positif, $b = e^a \quad \Leftrightarrow \quad a = \ln(b)$.

Pour a quelconque, $\ln\left(e^a\right) = a$.

Pour b strictement positif, $e^{\ln(b)} = b$.

Du fait de la réciprocité de l'exponentielle et du logarithme, les courbes du logarithme et de l'exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



Le point $\left(a\ ;\ b = e^a\right)$ est sur la courbe de l'exponentielle.

Le point $\left(b\ ;\ a = \ln(b)\right)$ est sur la courbe du logarithme.

Ce qu'on devine à voir la courbe du logarithme, et ce qu'on ne voit pas

Ce qu'on « voit »	*Ce qui s'écrit*
Il n'y a pas de courbe sur la gauche.	$\ln(x)$ est défini pour $x>0$
La courbe monte de gauche à droite, $\ln(x)$ est strictement croissante.	Pour a et b strictement positifs, $\ln(a)=\ln(b) \Leftrightarrow a=b$ $\ln(a)<\ln(b) \Leftrightarrow a<b$
La position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, dessous puis dessus	$\ln(x)<0 \Leftrightarrow x\in\,]0\,;\,1[$ $\ln(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ $\ln(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]1\,;\,+\infty[$
L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe.	$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$
La courbe s'éloigne à droite tout en haut, lentement mais sûrement	$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

Ce qu'on ne « voit » pas : expression de la dérivée de $\ln(x)$

La dérivée de la fonction $\ln(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Compléments : la dérivée d'une fonction composée $ln(u)=ln\circ u$

Quand u est une fonction, la dérivée de $\ln(u)$ est $\dfrac{u'}{u}$.

En particulier, si u est une fonction affine : $u=ax+b$, la fonction $f(x)=\ln(ax+b)$ est définie et dérivable sur l'intervalle où $ax+b>0$,

et sa dérivée est $f'(x)=\dfrac{\text{la dérivée de }(ax+b)}{ax+b}=\dfrac{a}{ax+b}$.

2. Les propriétés algébriques du logarithme

Pour tous $a>0$, $b>0$, n entier

$$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$$

$$\ln(a^n)=n\ln(a) \qquad \ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$$

Croissances comparées de x^n, $\ln(x)$, e^x

- x^n ($n=1, 2, 3$, etc) et $\ln(x)$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n} \text{ se présente sous la forme indéterminée } \frac{\infty}{\infty}.$$

En fait, x^n croît beaucoup plus vite que $\ln(x)$, et est donc prépondérant.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0}$$

Aussi

$$\boxed{\lim_{x\to0}x^n\ln(x)=0}$$

- x^n ($n=1, 2, 3$, etc) et e^x

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} \text{ se présente sous la forme indéterminée } \frac{\infty}{\infty}.$$

En fait, e^x croît beaucoup plus vite que x^n, et est donc prépondérant.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty}$$

Aussi

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0}$$

Énoncés des exercices

* Exercice 1 — 00 min

En détaillant les calculs, prouver que $e^{2\ln(3)} - e^{\ln(5)-\ln(2)} = 6,5$.

* Exercice 2 — 15 min

Résoudre chacune des quatre équations suivantes :

$$(e^x+1)(e^x-2)=0 \quad \ln(2x-1)=1 \quad \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)=0 \quad \ln(\ln(x))=0$$

* Exercice 3 — 10 min

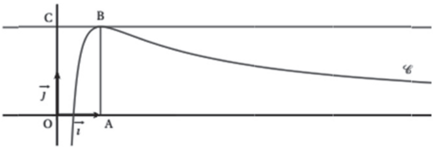
Soit u la fonction définie sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ par $u(x) = -\ln(x)$.

1. Prouver que u est une fonction convexe sur I.

2. Après avoir donné une équation de la tangente à la courbe de u au point d'abscisse 1, justifier que, pour tout $x>0$, $x-1 \geq \ln(x)$.

* Exercice 4 — 15 min

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\ \vec{j})$, la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,;0)$, $(1\,;2)$, $(0\,;2)$;
- la courbe passe par le point B et la droite (BC) est tangente à C en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{a+b\ln x}{x}$.

1. En utilisant le graphique précédent, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

2. Vérifier que, pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{b-a-b\ln x}{x^2}$.

3. Déduire des réponses précédentes les réels a et b.

* Exercice 5 ⏰ 15 min

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $u(x)=x^2-2+\ln(x)$.

1. Justifier que la fonction u est croissante, déterminer ses limites en 0 et $+\infty$.

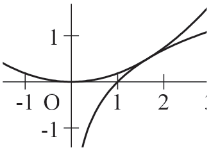
2. Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α située entre 1 et 2.

3. Étudier le signe de $u(x)$ selon x.

* Exercice 6 ⏰ 15 min

Le but de cet exercice est de rechercher le nombre de solutions de l'équation $\ln(x)=\dfrac{x^2}{2e}$.

1. Pour se faire une opinion, on fait tracer à une calculatrice les représentations graphiques des fonctions $\ln(x)$ et $\dfrac{x^2}{2e}$. Ci-dessous ce qui est obtenu.



Expliquer pourquoi il est difficile de se faire une opinion à la vue du dessin.

2. On décide d'étudier la fonction $f(x)=\ln(x)-\dfrac{x^2}{2e}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. Étudier les variations de cette fonction, et conclure quant à l'objectif de l'exercice.

* Exercice 7 ⏰ 20 min

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$. Et soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. Démontrer que C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, point dont on précisera les coordonnées.

2. Montrer que $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$, où f' est la fonction dérivée de f.

3. Résoudre l'inéquation $-1-2\ln(x)<0$. En déduire le signe de $f'(x)$.

4. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

Exercices

* Exercice 8 — 10 min

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $x > 0$. Exprimer $\ln\left(3x^2\sqrt{x}\right)$ en fonction de $\ln(x)$.

2. Déterminer le réel a tel que $\ln(a) = 2\ln(3) - 3\ln(2)$.

* Exercice 9 — 15 min

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$.
On pose $v_n = \ln(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

2. Déterminer les entiers naturels n tels que $2 \times 0,7^n \leq 10^{-4}$.

* Exercice 10 — 15 min

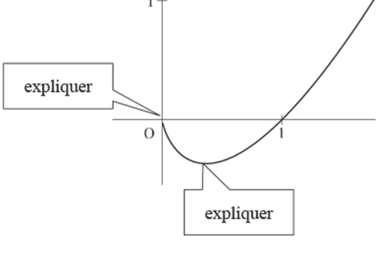
1. Déterminer les quatre limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)} \quad \lim_{x\to+\infty} (\ln(x) - x) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x} \quad \lim_{x\to 0} x^2 \ln(x)$$

2. En utilisant : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$.

* Exercice 11 — 15 min

Soit la fonction f définie, et dérivable, sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.
Ci-dessous une vue de la courbe C de f dans un repère.



Expliquer donc ce qui est à expliquer.

* Exercice 12 — 15 min

Ci-dessous le tableau variation d'une fonction u définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, avec valeurs et limite.

Compléter toutes les lignes.

On rappelle que $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ et $(e^u)' = u'e^u$.

x	0		1		$+\infty$
u	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
signe de u'					
signe de $(\ln(u))'$					
variation de $\ln(u)$					
signe de $(e^u)'$					
variation de e^u					

* Exercice 13 — 10 min

Soit la fonction f définie, et dérivable, sur $\mathrm{I} = [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(e^x + x) - x$.

On note C la courbe de f dans un repère et f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que, pour tout x de I, $f'(x) = \dfrac{1-x}{e^x + x}$. On rappelle que $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

2. Étudier la variation de la fonction f sur I.

3. Montrer que, pour tout x de I, $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{e^x}\right)$.

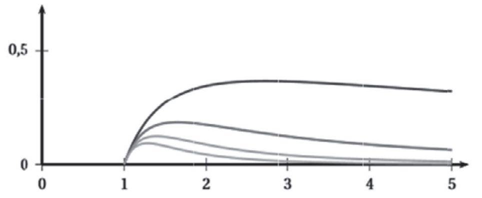
4. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement.

** Exercice 14 — 20 min

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$ par : $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$. Pour tout entier $n > 0$, on note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes C_n pour n appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.

Exercices



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\ ;\ 5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$.

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$.

On note A_n le point de la courbe C_n ayant pour ordonnée ce maximum.

Montrer que tous les points A_n appartiennent à la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{e}\ln(x)$.

Exercices

** Exercice 15 — 25 min

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans. L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètres) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$ par $f(x) = 30\ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right)$ où x désigne le diamètre exprimé en mètres et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$.

2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

*** Exercice 16 — 25 min

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir a par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.