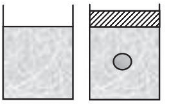
5 Modéliser l'écoulement d'un fluide

1. Poussée d'Archimède

Lorsque l'on plonge un solide dans un liquide (ou un gaz) en équilibre, ce solide est soumis à un ensemble de forces pressantes de la part de ce liquide.

Immergeons un solide.



Le volume de liquide (partie hachurée) correspond au volume du fluide déplacé par le solide.

L'ensemble de ces forces pressantes exercées par un liquide sur un solide immergé se nomme « poussée d'Archimède ».

La poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_A}$ est une force verticale dirigée vers le haut.

$$\overrightarrow{\Pi_A} = m_{\text{fluide déplacé}} \times \vec{g}$$

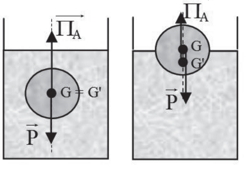
$$\overrightarrow{\Pi_A} = \rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{déplacé}} \times \vec{g}$$

ρ_{fluide} : masse volumique du fluide en kg.m^{-3} ;

$V_{\text{déplacé}}$: volume en m^3 ;

g : intensité de la pesanteur.

Point d'application : il se situe au centre de gravité (G′) de la masse du fluide déplacée.



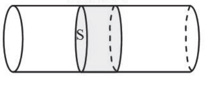
(les vecteurs sont décalés pour mieux voir le point d'application des forces).

2. Écoulement d'un fluide en régime permanent

Conservation du débit volumique

L'écoulement d'un fluide est permanent (ou stationnaire) lorsque les vitesses et les pressions en chaque point du fluide ne dépendent pas du temps.

Soit un écoulement d'une masse de fluide m, de volume V pendant une durée t.



On définit le débit volumique D_v par la relation :

$$D_V = \frac{V}{\Delta t}$$

D_V est le débit volumique en $m^3.s^{-1}$.

V est le volume du fluide en m^3.

Δt est la durée de l'écoulement en s.

On peut aussi définir le débit massique D_m :

$$D_m = \frac{m}{\Delta t}$$

D_m est le débit massique en $kg.s^{-1}$.

m est la masse du fluide en kg.

Δt est la durée de l'écoulement en s.

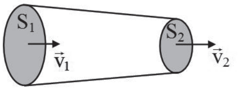
Comme $m = \rho \times V$, les deux débits sont reliés par la relation :

$$D_m = \rho \times D_V$$

Avec ρ, la masse volumique du fluide en $kg.m^{-3}$.

Continuité

Un fluide incompressible traverse une canalisation, le débit volumique D_{v1} est égal au débit volumique D_{v2}. Il y a conservation du débit volumique, c'est l'équation de continuité.



$$D_{v1} = D_{v2} = \text{constante}$$

On exprime le débit volumique en fonction de la vitesse moyenne d'écoulement du fluide v et la section S de la canalisation, par la relation :

$$D_v = v \times S$$

Ainsi :

$$v_1 \times S_1 = v_2 \times S_2$$

Relation de Bernoulli

La relation de Bernoulli s'applique à un écoulement permanent de fluides parfait et incompressibles.

Soit un point A d'entrée et un point B de sortie situés sur une même ligne de courant (ligne tangente en chaque point à la vitesse), la relation de Bernoulli s'exprime par :

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

3. Application de la relation de Bernoulli

Formule de Toricelli

Détermination de la vitesse d'éjection d'un fluide

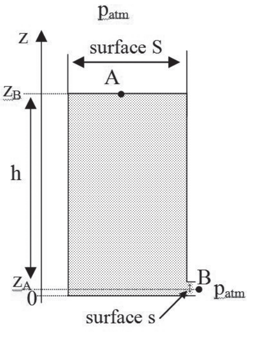
Au point A la surface S et au point B la surface s sont à l'air libre, donc la pression est égale à la pression atmosphérique.

La surface S est très grande devant la surface s.

L'application de la relation de Bernoulli entre le point A et le pont B donne :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

On simplifie cette expression :



Aux points A et B on peut écrire :

$$p_A = P_{atm},\ p_B = p_{atm}.$$

Le débit est continu, donc : $Sv_A = sv_B$ mais comme $S >> s$ on en en déduit que $v_A << v_B$.

v_A est négligeable devant v_B.

L'équation se simplifie ainsi :

$$\rho g z_A = \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

On simplifie par ρ :

$$g z_A = g z_B + \frac{1}{2} v_B^2$$

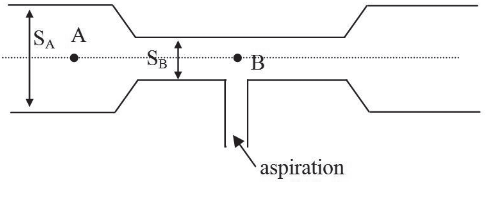
D'où :

$$v_B^2 = 2g(z_A - z_B) \text{ or } z_A - z_B = h$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

Cette relation est connue sous le nom de formule de Torricelli.

Effet Venturi



Une conduite a la forme ci-dessus. Les points A et B sont sur la même ligne de courant. Le fluide circulant dans cette conduite est considéré comme parfait.

L'équation de continuité permet d'écrire :

$$D_{VA} = D_{VB}$$
$$S_A v_A = S_B v_B$$

La relation de Bernoulli donne :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

Soit comme $z_A = z_B$:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$
$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2)$$

D'après l'équation de continuité, comme $S_A >> S_B$, cela implique que $v_A << v_B$.

On en déduit que $p_B << p_A$ ce qui entraîne une aspiration. On trouve une utilité à cette application dans les trompes à eau, les pistolets à peinture…

Énoncés des exercices

Dans tous les exercices on considère le fluide comme parfait et en régime permanent.

* Exercice 1 — 10 min

On procède à la vidange d'un bassin à l'aide d'une pompe immergée (P). La conduite de refoulement a une section S de 40 cm^2. La pompe doit avoir une puissance suffisante pour assurer un débit volumique $D_v = 72\ m^3.h^{-1}$.

Quelle est, en $m.s^{-1}$, la vitesse d'écoulement de l'eau.

* Exercice 2 — 10 min

On se propose d'étudier le fonctionnement d'une pompe à chaleur et d'une pompe de circulation d'eau alimentant un radiateur modélisé par une canalisation cylindrique.

- Débit volumique de l'eau : $D_v = 4{,}17.10^{-5}\ m^3.s^{-1}$.
- Diamètre intérieur des canalisations : $d = 1{,}5.10^{-2}$ m.
- Masse volumique de l'eau : $\rho = 1000\ kg.m^{-3}$.

1. Calculer la vitesse de déplacement v de l'eau dans la canalisation du radiateur.

2. Calculer le débit massique D_m de l'eau.

* Exercice 3 — 15 min

Une pompe hydraulique débite 300 $m^3.h^{-1}$ d'eau froide.

Sa conduite d'aspiration a un diamètre d_1 et la vitesse du fluide est $v_1 = 2{,}65\ m.s^{-1}$
Sa conduite de refoulement a un diamètre $d_2 = 100$ mm.

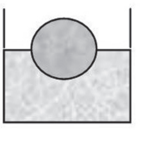
Donnée : la masse volumique de l'eau est $\rho_0 = 1000\ kg.m^{-3}$.

1. Calculer le diamètre d_1 dans la tuyauterie d'aspiration.

2. Calculer la vitesse d'écoulement v_2 dans la tuyauterie de refoulement.

* Exercice 4 — 15 min

Un flotteur sphérique, de masse m = 50,00 g, permet de connaître le niveau atteint par les hydrocarbures dans un débourbeur et le moment où il faut les pomper. Sachant qu'il flotte sur la couche d'hydrocarbures en étant à moitié immergé, calculer son rayon.



Exercices

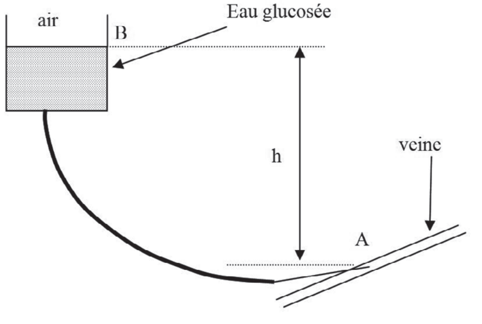
Données :

- densité des hydrocarbures : $d_h = 0,85$
- volume d'une sphère : $V = (4/3)\pi.R^3$
- intensité de la pesanteur : $g = 10\ m.s^{-2}$
- masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1000\ kg.m^{-3}$.

* Exercice 5

15 min

Une personne hospitalisée peut déambuler dans un couloir en emmenant avec elle une perfusion contenant un volume V = 0,5 L d'eau glucosée suspendue à un crochet adapté à un support mobile.



1. a. Définir la masse volumique ρ d'un corps en précisant les unités du système international.

b. Montrer que la masse volumique ρ de la solution d'eau glucosée de volume V = 0,500 L et de masse m = 0,525 kg est $\rho = 1\,050\ kg.m^{-3}$.

2. La perfusion nécessite d'introduire dans la veine au point A un cathéter relié par un tube au flacon diffuseur.

a. La tension veineuse T représente la différence de pression entre les points A et B (voir schéma) : T = 60 mm de mercure.

Montrer que la tension veineuse T en pascals vaut pratiquement T = 8 000 Pa. On rappelle que 1 mm de mercure est équivalent à 133,3 Pa.

b. Calculer la hauteur minimale h entre le point B situé à la surface libre de la perfusion et le point d'injection A pour que le liquide puisse pénétrer dans la veine. On rappelle la loi de la statique des fluides :

$$\Delta p = \rho.\ g\ h \text{ avec } g = 10\ N.kg^{-1} \text{ (intensité de la pesanteur).}$$

3. Le débit volumique D de la perfusion vaut $D = 4.10^{-8}\ m^3.s^{-1}$. La section cathéter est $S = 4.10^{-6}\ m^2$.

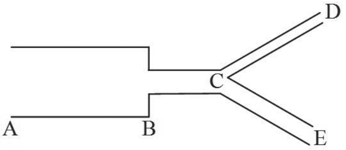
Quelle est la vitesse d'écoulement v de l'eau glucosée ?

Exercices

** Exercice 6

⏰ 20 min

De l'eau s'écoule a une vitesse uniforme de 3,5 m/s dans une conduite AB de d_1 = 1,8 m de diamètre reliée a une conduite BC de d_2 = 1,3 m de diamètre. Au point C la conduite se sépare en deux parties. La première CD a un diamètre de d_3 = 0,6 m et transporte le tiers du débit volumique total. La vitesse dans la seconde CE est 2,5 m/s.

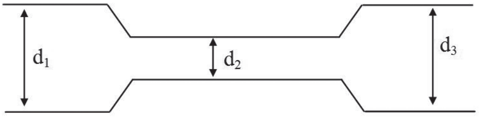


1. Calculer le débit volumique D_v dans la conduite AB.
2. Sachant que le débit se conserve, en déduire la vitesse dans la conduite BC.
3. Déterminer la vitesse du fluide dans la conduite CD.
4. Calculer le diamètre d_4 de la conduite CE.

** Exercice 7

⏰ 25 min

Sur certains types de murs capteurs, on pratique des ouvertures horizontales (aussi appelés évents) dans les parties basses et hautes du mur en béton, le dispositif s'appelle alors « mur Trombe » (du nom de son inventeur). On suppose que les ouvertures, situées dans la partie haute du mur, ont le profil suivant (en vue transversale, sans souci d'échelle).



On suppose que l'air ascendant situé entre la vitre et le mur arrive à l'entrée, de diamètre d_1 = 10 cm d'un évent supérieur avec une vitesse $v_1 = 20\ cm.s^{-1}$. Le diamètre intérieur de l'évent d_2 vaut la moitié de d_1. Le diamètre de sortie de l'évent (côté intérieur) a la même valeur que celui de l'entrée $d_3 = d_1$.

1. Rappeler l'expression de l'équation, dite de continuité, qui traduit la conservation du débit volumique, noté Q_v en fonction de S (surface) et v (vitesse).
2. Grâce à cette relation et à l'énoncé, montrer que la vitesse à l'intérieur de l'évent, notée v_2, vaut $80\ cm.s^{-1}$.
3. Grâce à la géométrie de la conduite, donner la valeur de la vitesse de l'air v_3, à la sortie de l'évent.

   Afin de commander simplement l'ouverture et la fermeture de l'évent supérieur, on cherche à déterminer l'écart de pression entre l'intérieur de l'évent et la pièce (sortie de l'évent supérieur).

Exercices

4. À l'aide de la relation de Bernouilli montrer que l'expression de la dépression entre la pression P_2 (à l'intérieur de l'évent) et P_3 (pression à la sortie de l'évent) en fonction de v_1 peut s'écrire :

$$\Delta p = P_2 - P_3 = -\frac{15}{2}\rho v_1^2$$

Calculer cette dépression.

On donne la valeur de la masse volumique ρ de l'air : 1,2 $kg.m^{-3}$.

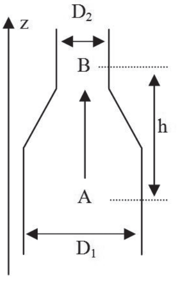
La partie interne de l'évent à une surface d'aire A = 750 cm^2, calculer la force due à la dépression Δp sur cette surface.

Exercices

** Exercice 8

20 min

Une conduite verticale, de diamètre D_1 présente un étranglement de diamètre D_2. Elle sert à transporter de l'eau de masse volumique ρ. L'eau s'écoule de bas en haut et sera considérée dans tout le problème comme un fluide parfait.



Soient deux points A et B du fluide situé à une distance verticale h l'un de l'autre, comme l'indique la figure ci-contre.

L'accélération de la pesanteur (g) est uniforme dans l'espace où se situe la conduite.

1. Vannes de la conduite fermées.

   En précisant la loi utilisée, exprimer puis calculer la différence de pression $p_A - p_B$.

2. Vannes ouvertes, fluide en écoulement.

   a. Le débit volumique de l'eau est noté Q_v. Exprimer et calculer son débit massique.

   b. En utilisant les données de l'énoncé, exprimer puis calculer les vitesses v_A et v_B de l'eau aux points A et B.

3. Soit p_A la pression au point A.

   a. Exprimer la pression p_B au point B.

   b. Calculer la pression p_B et la différence de pression $p_A - p_B$. Doit-on retrouver la même valeur que dans la question 1. ?

Données numériques :

- $\rho = 1,0 \times 10^3\ kg.m^{-3}$;
- $g = 10\ m.s^{-2}$;
- h = 4,0 m ;