Chapitre **3**

Modéliser l'évolution temporelle d'une transformation nucléaire

La radioactivité est due à l'instabilité des noyaux de certains isotopes. La loi de décroissance exponentielle est l'occasion de s'initier à l'étude d'une équation différentielle. C'est surtout une propriété qui permet des datations précises. Certes la radioactivité est très dangereuse pour la santé mais paradoxalement, elle possède des applications très importantes en médecine en particulier dans le domaine de l'imagerie médicale.

Un scientifique

Le physicien français Henri **Becquerel** (1852-1908) étudie à l'École polytechnique et à celle des Ponts et Chaussées. Son diplôme d'ingénieur en poche, il préfère s'orienter vers la recherche. Ses premiers travaux concernent la phosphorescence et la spectroscopie infrarouge. Pourtant, sa célébrité lui vient de la découverte, par hasard, de la radioactivité en 1896 et c'est dans ce domaine qu'il poursuit ses recherches, suivi par les époux **Curie** qui feront de spectaculaires découvertes. Les trois savants se partageront le prix Nobel de physique en 1903.

LE SAVIEZ-VOUS ?

En cas d'alerte d'accident nucléaire, les populations proches sont encouragées à absorber un comprimé d'iodure de potassium. Ceci permet de saturer la glande thyroïde et d'empêcher qu'elle absorbe différents isotopes d'iode radioactif. Cette prise ne doit se faire que sur injonction de la cellule de crise.

■■ Objectifs

■ Les notions que je dois maîtriser

▷ Connaître les facteurs responsables de la stabilité ou de l'instabilité d'un noyau

▷ Connaître, en fonction de sa position dans le diagramme (N, Z), la nature de la transformation nucléaire subie par le noyau radioactif

▷ Connaître la loi de décroissance radioactive qui régit une population de noyaux radioactifs ainsi que la notion de temps de demi-vie

▷ Savoir ce que l'on entend par radioactivité naturelle et son application dans le domaine de la datation, savoir ce qu'est la radioactivité artificielle et ses applications en médecine

■ Les compétences que je dois acquérir

▷ Savoir écrire une transformation nucléaire en respectant les règles de conservation de Soddy et savoir identifier un type de radioactivité

▷ Savoir résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants pour retrouver la loi de décroissance radioactive

▷ Savoir exploiter une courbe de décroissance radioactive à des fins de datation ou dans le cadre d'une application médicale

■■ Résumé de cours

■ Les différents types de radioactivité

❑ Composition du noyau et stabilité

Le noyau d'un atome de symbole ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ est constitué de A **nucléons** dont Z **protons** de charge $(+e)$ et $\mathrm{N} = \mathrm{A} - \mathrm{Z}$ **neutrons** de charge nulle. Le nombre A est aussi appelé nombre de masse car la masse de l'électron étant négligeable devant la masse d'un nucléon, toute la masse de l'atome est concentrée dans son noyau. Le nombre de protons ou numéro atomique Z caractérise l'élément chimique et deux noyaux appartenant au même élément chimique qui diffèrent par leur nombre de neutrons sont dits **isotopes**. La cohésion du noyau est un équilibre physique délicat entre l'interaction nucléaire forte, attractive et de faible portée (environ la taille du noyau soit $10^{-15}\,\mathrm{m}$) entre les nucléons et la répulsion électrostatique (portée infinie mais qui varie en $\dfrac{1}{r^2}$) entre les protons. Un excès de l'un des deux types de particule provoque l'instabilité du noyau, ce qui conduit celui-ci à se transformer en un noyau plus stable.

❑ Le diagramme (N, Z) et les différents types de radioactivité

Le diagramme (N, Z) permet de prévoir la stabilité ou l'instabilité des noyaux en fonction de leur position dans le diagramme ainsi que leur mode de radioactivité. Les noyaux présents sur la « vallée de stabilité », zone correspondant sensiblement à la première bissectrice $N = Z$ du diagramme, sont les noyaux ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$, ${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$, ${}^{56}_{28}\mathrm{Fe}$… Les noyaux possédant un excès de protons sont instables et subissent une **désintégration** β^+ correspondant à la transformation, au sein du noyau, de l'un des protons en excès en un neutron avec émission d'un positron ${}^{0}_{1}e$, l'antiparticule de l'électron. Les noyaux possédant un excès de neutrons sont instables et subissent une **désintégration** β^- correspondant à la transformation, au sein du noyau, de l'un des neutrons en excès en un proton avec émission d'un électron ${}^{0}_{-1}e$. La **désintégration** α concerne les noyaux lourds et s'accompagne de l'émission d'un noyau d'hélium ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$. Enfin la **désintégration** γ est l'émission d'un rayonnement ou photon gamma très énergétique car de très basse longueur d'onde par un noyau excité sans modification de sa composition.

⇨ **Méthode 3.1. Comment écrire l'équation d'une transformation nucléaire ?**

■ L'évolution temporelle d'une population de noyaux

❑ Loi de décroissance radioactive

Il n'est pas possible de prévoir à quel moment un noyau instable va se désintégrer, car son devenir est indépendant de son âge ou de son environnement, on parle du caractère **aléatoire** de la désintégration radioactive. Cependant, si on étudie une population contenant un grand nombre N de noyaux radioactifs, on observe que l'**activité** de cet échantillon, correspondant au nombre de désintégrations par seconde et définie par $A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$, exprimée en becquerel Bq, est proportionnelle au nombre de noyaux radioactifs N soit $A = k \cdot N$ donc $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + k \cdot N = 0$.

Le nombre de noyaux N radioactifs obéit ainsi à une **équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et second membre nul**. Il en découle une évolution exponentielle décroissante : $N(t) = N_0 \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})$ où τ désigne une **constante de temps** caractéristique du noyau considéré. En pratique, on définit pour un noyau donné un **temps de demi-vie** $t_{1/2}$, durée au bout de laquelle le nombre de noyaux de la population est divisé par deux, durée reliée à la constante de temps par : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\tau}$.

⇨ **Méthode 3.2. Comment résoudre une équation différentielle du premier ordre ?**

■ Applications

❑ Radioactivité naturelle et datation

Le fait qu'une population de noyaux radioactifs suive une loi de décroissance radioactive caractéristique de la nature de ce noyau peut être utilisé afin de déterminer l'âge de différents objets. Un exemple familier est la datation au carbone 14 des matériaux organiques. Le carbone est essentiellement présent sous la forme stable de l'isotope 12 mais les êtres vivants contiennent une faible quantité constante de l'isotope 14. Cet isotope, dont la demi-vie est égale à 5730 ans, est produit en permanence par les collisions des rayons cosmiques dans l'atmosphère. Il est absorbé par les plantes via la photosynthèse et ingéré par les animaux qui mangent ces plantes. Dès que l'organisme meurt, l'absorption de carbone 14 s'arrête, le carbone 12 reste inchangé mais le carbone 14 se désintègre progressivement et n'est pas remplacé. Ainsi, grâce à la mesure du rapport des quantités de carbone 14 et de carbone 12, on peut mesurer la durée écoulée depuis la mort de l'organisme.

❑ Radioactivité artificielle et médecine

De nombreuses techniques médicales de diagnostique et de traitement utilisent des isotopes radioactifs. Par exemple le technétium absorbé par les os se concentre dans les régions de croissance anormale tel que les articulations arthritiques, cet isotope artificiel de demi-vie de 6 heures se désintègre suivant le mode γ ; le temps de demi-vie est suffisamment long pour obtenir une bonne image avec une caméra et suffisamment court pour ne pas produire des irradiations indésirables. D'autres noyaux tels que le fluor 18, de demi-vie 110 minutes, se désintègrent suivant le mode β^+ en produisant des positons qui s'annihilent avec les électrons de l'environnement local engendrant des rayons gamma utilisés dans l'imagerie médicale.
Par ailleurs, des faisceaux énergétiques de rayonnements γ émis par des substances radioactives telles que le thallium-201 ou l'iode 131 sont utilisés dans le traitement du cancer grâce à leur action très localisée sur les cellules malades.

■■ Méthodes

❑ Méthode 3.1. Comment écrire l'équation d'une transformation nucléaire ?

L'équation d'une transformation nucléaire doit être équilibrée en respectant les règles de conservation de Soddy, c'est-à-dire :
- conservation du nombre de charge Z,
- conservation du nombre de masse A.

On rappelle les différents modes de radioactivité :
- radioactivité α : émission d'un noyau d'hélium ou particule alpha,
- radioactivité β^- et radioactivité β^+ : émission d'un électron ou émission de son antiparticule le positon,
- radioactivité γ : émission d'un photon, ou émission d'une onde électromagnétique de très courte longueur d'onde donc très énergétique.

➪ **Exercices 3.1 et 3.2**

Désintégration alpha de l'uranium 238 (92 protons, 146 neutrons) en thorium 234 (90 protons, 144 neutrons) : ${}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$; l'uranium 238 est le plus lourd noyau naturel connu à ce jour avec une demi-vie de 4,5 milliard d'années, c'est en mesurant la quantité d'hélium enfermé dans le minerai d'uranium produit par cette transformation qu'Ernest Rutherford proposa la première estimation de l'âge de la Terre.

Désintégration β^+ du zirconium 89 (40 protons, 49 neutrons) en yttrium 89 (39 protons, 50 neutrons) : ${}^{89}_{40}\mathrm{Zr} \rightarrow {}^{89}_{39}\mathrm{Y} + {}^{0}_{1}e$; cette transformation nucléaire est utilisée en imagerie médicale car les positons émis, antiparticules des électrons, et les électrons de la matière s'annihilent en produisant des rayons gamma détectables au moyen d'une caméra sensible à ces rayonnements ; elle est utilisée en tomographie à émission de positons pour le dépistage de cancers.

Désintégration β^- du strontium 89 (38 protons, 51 neutrons) en yttrium 89 (39 protons, 50 neutrons) : ${}^{89}_{38}\mathrm{Sr} \rightarrow {}^{89}_{39}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}e$; cette transformation nucléaire est utilisée en thérapie pour détruire les cellules cancéreuses d'une tumeur maligne au niveau des os.

Désintégration γ : le nombre de protons ou de neutrons du noyau ne change pas, ce qui change c'est la façon dont les nucléons du noyau s'organisent les uns autour des autres. Quand un arrangement réduit l'énergie du noyau, l'excès d'énergie est libéré sous la forme d'un photon. Cette transition est généralement immédiate, sauf dans des cas exceptionnels tels que le technétium 99, qui peut subsister dans son état excité pendant plusieurs heures, ce qui laisse le temps de l'injecter à un patient comme marqueur radioactif pour une scintigraphie osseuse : ${}^{99}_{43}Tc^* \rightarrow {}^{99}_{43}Tc + \gamma$.

❑ Méthode 3.2. Comment résoudre une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants ?

Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants constitue une **capacité mathématique** à atteindre. Il s'agit d'une équation vérifiée par une grandeur $X(t)$ dépendante du temps qui fait intervenir la dérivée première $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ de cette grandeur par rapport au temps sous la forme : $a \cdot \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + b \cdot X = c$. On préférera l'écrire en physique sous une forme homogène faisant apparaître les dimensions des grandeurs : $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{X}{\tau} = \frac{C}{\tau}$ où τ désigne une **constante de temps** caractéristique de l'évolution du système.
Nous rencontrerons ce type d'équation différentielle à différentes reprises dans le programme :
- loi de vitesse d'ordre 1 suivie par la concentration $C(t)$ d'un réactif en chimie,
- loi de décroissance suivie par le nombre $N(t)$ d'une population de noyaux radioactifs,
- loi d'évolution de la vitesse $v(t)$ d'un corps qui chute en étant soumis à une force de frottement,
- modélisation de l'évolution $T(t)$ de la température d'un système qui échange un flux de chaleur par conduction et convection avec un fluide en mouvement,
- évolution de la tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur lors de la charge ou de la décharge de celui-ci à travers une résistance.

⇨ **Exercice 3.2**

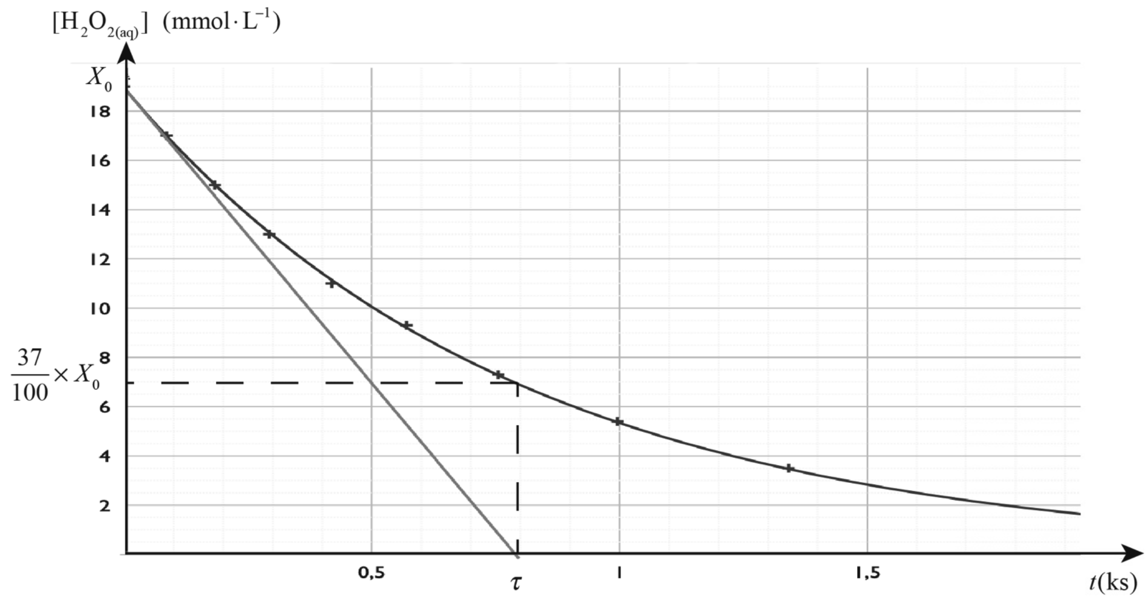
On admet que la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{X}{\tau} = \frac{C}{\tau}$ est d'un point de vue mathématique la somme de deux termes : une solution particulière et une solution générale de l'équation différentielle sans second membre.
D'un point de vue physique, le premier terme correspond au régime dit **permanent ou stationnaire**, c'est-à-dire ce qui se passe quand le système n'évolue plus dans le temps, tandis que le second terme correspond au régime dit **transitoire**, c'est-à-dire à ce qui se passe au cours de l'évolution temporelle de la grandeur.

La solution particulière est $X = C$ car si $X = C$ alors $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = 0$ et l'équation est bien vérifiée.

Une solution générale de l'équation différentielle sans second membre vérifie : $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{X}{\tau} = 0$, ce qui s'écrit en mathématiques en posant $X = f(t)$: $f'(t) + \frac{f(t)}{\tau} = 0$ soit $\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{1}{\tau}$, soit, en prenant la primitive des deux membres de l'équation : $\ln\big(f(t)\big) = -\dfrac{t}{\tau} + a$ d'où $X(t) = f(t) = \exp(-\dfrac{t}{\tau} + a) = \exp(a) \cdot \exp(-\dfrac{t}{\tau}) = A \cdot \exp(-\dfrac{t}{\tau})$.

Ainsi, en ajoutant les deux termes, la solution de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \dfrac{X}{\tau} = \dfrac{C}{\tau}$ sera de la forme : $\boxed{X(t) = C + A \cdot \exp(-\dfrac{t}{\tau})}$; c'est la valeur initiale de X à $t = 0$ que l'on notera X_0 qui va nous permettre de déterminer la valeur de la constante A ; en effet, en faisant $t = 0$ dans l'expression de la solution on obtient : $X_0 = C + A$ donc $A = X_0 - C$.
Deux cas de figure seront rencontrés dans notre programme :

Premier cas : $C = 0$; le second membre de l'équation différentielle du premier ordre est nul, alors $A = X_0$ donc $X(t) = X_0 \cdot \exp(-\dfrac{t}{\tau})$; $X(t)$ décroît de façon exponentielle au cours du temps en partant de la valeur initiale X_0.
Ci-dessous, l'exemple déjà rencontré de la concentration d'un réactif qui suit une loi de vitesse d'ordre 1 ; le graphe a été obtenu dans l'exercice **2.4.**

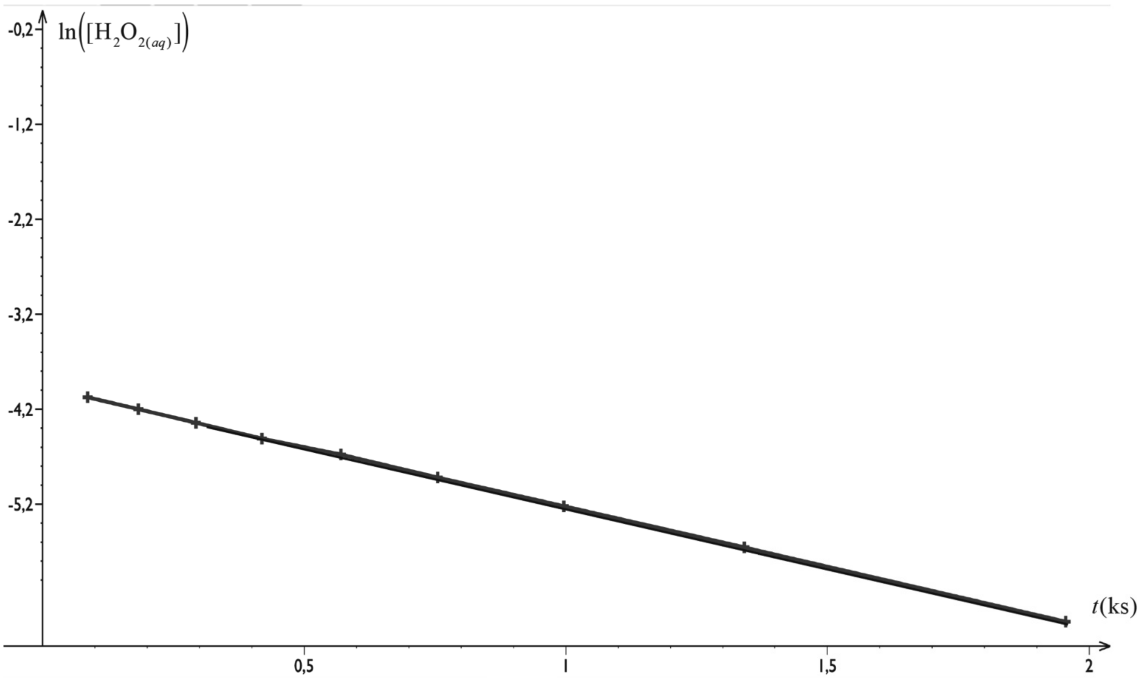


Il est intéressant d'observer qu'à $t = \tau$, $X(\tau) = X_0 \cdot \exp(-1) = 0{,}37 \times X_0$.
En d'autres termes, à $t = \tau$, X n'est plus égal qu'à 37% de sa valeur initiale X_0.
De plus, on peut considérer que $X(5\tau) = X_0 \cdot \exp(-5) = 0{,}0067 \times X_0 \simeq 0$ donc au bout de 5τ, X n'est plus égal qu'à 0,67 % de sa valeur initiale X_0, c'est-à-dire quasiment 0.

Par ailleurs, on peut montrer que la tangente à la courbe à $t=0$ intercepte l'axe horizontal correspondant à l'asymptote de la courbe à $t=\tau$; ce qui donne une autre méthode permettant de déterminer rapidement la valeur de τ .

Enfin, une autre méthode consiste à tracer le graphe $\ln(X)=f(t)$; puisque $X(t)=X_0 \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})$, on a : $\ln(X)=\ln(X_0)+\ln\left(\exp(-\frac{t}{\tau})\right)=\ln(X_0)-\frac{t}{\tau}$; $\ln(X)$ apparaît ainsi comme une fonction affine du temps de coefficient directeur $-\frac{1}{\tau}$. Le tracé du graphe $\ln(X)=f(t)$ puis sa modélisation mathématique permet ainsi de déterminer la constante de temps τ .

Ci-dessous, l'exemple de la concentration d'un réactif qui suit une loi de vitesse d'ordre 1 ; le graphe est celui qui a été obtenu dans l'exercice **2.4.**



Deuxième cas : $C \neq 0$; le second membre de l'équation différentielle du premier ordre est non nul et généralement on se place dans la situation où $X_0=0$, donc $A=-C$ et $X(t)=C-C\cdot\exp(-\frac{t}{\tau})=C\cdot\left(1-\exp(-\frac{t}{\tau})\right)$.

Cette fois $X(t)$ est une fonction exponentielle croissante du temps partant de $X_0=0$ et qui tend asymptotiquement vers la limite C .