Chapitre 9
Fonction logarithme népérien

On attribue l'invention des logarithmes au mathématicien écossais John **Napier**. Il les a introduits par des considérations cinématiques. Henry **Briggs** en comprend l'intérêt pour effectuer de grands calculs et introduit les logarithmes décimaux. Ils sont utilisés pour des unités de mesures en physique comme le décibel ou pour la notion de ph en chimie. Cependant, en mathématiques, les logarithmes népériens restent les plus utiles.

Un mathématicien

Henry **Briggs** est un mathématicien et astronome anglais qui travaille à Londres puis Oxford. Dès qu'il apprend la découverte des logarithmes par John **Napier** en 1614, il se rend à Édimbourg où il rencontre Napier à deux reprises et le convainc d'adopter les logarithmes de base dix. Il a en effet compris leur intérêt pour effectuer de grands calculs, si utiles en astronomie. Encore fallait-il dresser des tables donnant les logarithmes des nombres avec une grande précision. Il se lance dans cette tâche considérable. Il en publie une première avec six décimales en 1617, avec quatorze en 1624, suivie d'une table à quinze décimales pour les fonctions trigonométriques et ce, pour chaque centième de degré !

LE SAVIEZ-VOUS ?

John **Napier** était aussi un théologien militant.
Protestant convaincu, il écrivit un ouvrage, réimprimé une trentaine de fois, qui condamnait le catholicisme qu'il craignait de voir réintroduit dans son pays.
Il ne doutait pas que son nom resterait à la postérité, non pas pour les logarithmes mais pour la profondeur de sa pensée religieuse.

COMPÉTENCES

les incontournables

- Maîtriser les règles de calcul avec la fonction logarithme
  - pour calculer la somme, la différence de logarithmes
  - pour calculer le logarithme d'un produit, d'un quotient, d'une puissance
- Démontrer des égalités comprenant des logarithmes
  - en utilisant les propriétés algébriques de la fonction logarithme
  - en utilisant une méthode classique
- Calculer les limites de fonctions comportant des logarithmes
  - en utilisant les limites de la fonction logarithme
  - en utilisant la croissance comparée
  - en transformant l'expression de la fonction
- Résoudre des équations et inéquations comportant des logarithmes
  - en utilisant les propriétés algébriques de la fonction logarithme
  - en utilisant sa stricte croissance.
  - au moyen d'un changement de variable
- Étudier une fonction s'exprimant à l'aide de la fonction logarithme népérien
  - en utilisant les propriétés de la fonction logarithme
  - en utilisant la méthode de dérivation
  - en utilisant une fonction auxiliaire

et plus si affinités

- Utiliser les propriétés de la fonction logarithme népérien
  - pour étudier des suites
  - pour découvrir la constante d'Euler

Résumé de cours

Définition et règles de calcul

Définition

Depuis la spécialité suivie en classe de première, nous savons que la fonction exponentielle est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction strictement monotone, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, il existe une unique solution réelle de l'équation $e^y = x$ d'inconnue y.

Théorème-Définition 9.1.— Pour tout réel $x > 0$, l'équation $\exp(y) = x$, d'inconnue $y \in \mathbb{R}$, admet une solution réelle unique, appelée **logarithme népérien** de x et notée $\ln(x)$. On note

$$\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

la fonction qui à tout réel strictement positif associe son logarithme népérien.

Attention ! $\ln(x)$ est défini seulement pour $x > 0$ mais il peut prendre toute valeur réelle.

Proposition 9.2.— Ainsi, par définition

- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$
- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

Vocabulaire : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+\star}$ *et* $\ln : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions* ***réciproques*** *l'une de l'autre.*

Règles de calcul avec la fonction logarithme

Théorème 9.3.— Relation fonctionnelle fondamentale —.

$$\boxed{\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}, \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)}$$

Retenez que : le logarithme d'un produit de nombres strictement positifs est la somme de leurs logarithmes.
À partir de cette relation fondamentale, les autres règles de calcul se déduisent aisément :

Théorème 9.4.— Règles de calcul pour les logarithmes —.

- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$, $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$, $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\ln(1/x) = -\ln(x)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$.

■ Étude de la fonction logarithme népérien

Dérivée et sens de variation de la fonction logarithme

Théorème 9.5.— La fonction ln est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \in \mathbb{R}^{+\star},\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.}$$

Proposition 9.6.— Par conséquent, $\ln : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement croissante :

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star},\ \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$.
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star},\ \ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$.

En particulier, pour tout x strictement positif : $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Limites de la fonction logarithme

Théorème 9.7.— Limites de la fonction logarithme —. Pour tout réel $a > 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to a} \ln(x) = \ln(a)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Théorème 9.8.— Croissances comparées —. Pour tout entier naturel n non nul

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$

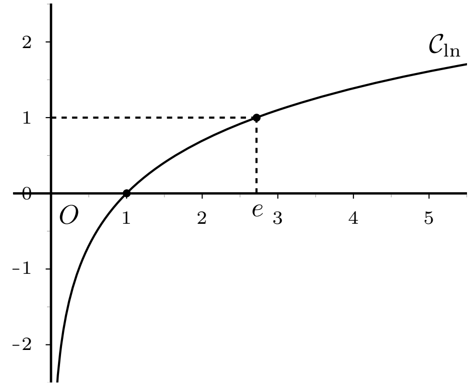
À l'aide de la dérivée de la fonction ln en 1, on obtient la limite suivante :

Théorème 9.9.— Comportement en 1

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

Tableau de variations et graphe

x	0	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	$+$
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

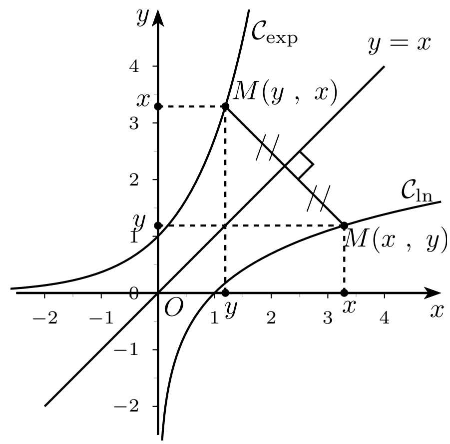


- L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ représentative de la fonction logarithme népérien.
- La tangente à $\mathcal{C}_{\ln}$ en 1 a pour équation $y = x - 1$.
- La tangente à $\mathcal{C}_{\ln}$ au point e, a pour équation $y = x/e$.

Les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice, la droite d'équation $y = x$.

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} M(x,\ y) \in \mathcal{C}_{\ln} \quad &\Leftrightarrow \quad y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y \\ &\Leftrightarrow \quad M(y,\ x) \in \mathcal{C}_{\exp} \end{aligned}$$



Dérivée d'une fonction composée

> **Proposition 9.10.—** Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs strictement positives. La fonction f définie par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et :
>
> $$\boxed{\text{Pour tout réel } x \in I,\ f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

En conséquence, si u est une fonction dérivable strictement positive sur un intervalle I alors les fonctions u et $\ln(u)$ ont même sens de variation sur I.

Démonstrations

Dérivée de la fonction logarithme népérien

Théorème 9.5.— La fonction ln est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \in \mathbb{R}^{+\star},\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.}$$

Démonstration $\triangledown$
Conformément au programme, nous admettons que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ en tant que fonction réciproque de la fonction exponentielle.
Comme les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre, on a : pour tout réel $x > 0$, $f(x) = e^{\ln(x)}$.
La fonction ln étant dérivable sur $]0\,;+\infty[$, f est aussi dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel $x > 0$, calculons $f'(x)$ de deux manières différentes :

- $f'(x) = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln(x)} = x\ln'(x)$
- on a aussi $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$

On en déduit que pour tout réel $x > 0$, $x\ln'(x) = 1$, par suite $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. ▲

Croissances comparées

Théorème 9.8.— Croissances comparées —. Pour tout entier naturel n non nul

$$\boxed{\bullet \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \qquad \bullet \lim_{x\to 0^+} x^n\ln(x) = 0}$$

Démonstration $\triangledown$
Conformément au programme, nous ne traitons ici que les cas où $n = 1$. Le cas général s'en déduit aisément par comparaison.

• Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Pour étudier cette limite, nous allons effectuer une composition de limite.
Posons $y(x) = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Or par croissances comparées entre y et e^y au voisinage de $+\infty$, nous savons que $\dfrac{y}{e^y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$. Par composition, il s'ensuit que $\dfrac{y(x)}{e^{y(x)}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire que

$$\frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Comme $e^{\ln(x)} = x$, nous avons bien établi que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

• Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Pour étudier cette limite, nous allons utiliser une composition de limites.
Posons $y(x) = \ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$. Or nous savons (**théorème 6.7**) que $ye^y \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.
Par composition des limites, il en résulte que $y(x)e^{y(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, c'est-à-dire que $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. ▲

Approfondissements, algorithmes

Les fonctions puissances d'exposant α réel

Définition des fonctions puissances d'exposant α

Définition : *Soit α un réel. La fonction p_α est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par :*

$$p_\alpha(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

Remarque : pour $n \in \mathbb{N}$, on sait que : $\ln(x^n) = n\ln(x)$. En prenant l'exponentielle, on retrouve : $x^n = \exp(n\ln(x))$. La définition des puissances d'exposant réel prolonge celle des puissances d'exposant entier.

Exemple : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Propriétés des fonctions puissances d'exposant α

Théorème 9.11.— Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$; $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$.

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$
- $x^\alpha \times y^\alpha = (x \times y)^\alpha$
- $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
- $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $\dfrac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$

Démonstration ▽

- Par définition $x^\alpha = p_\alpha(x) = \exp(\alpha\ln(x))$. En prenant le logarithme, il vient $\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$.
- $x^\alpha \times x^\beta = \exp(\alpha\ln(x)) \times \exp(\beta\ln(x)) = \exp(\alpha\ln(x) + \beta\ln(x)) = \exp((\alpha+\beta)\ln(x)) = x^{\alpha+\beta}$.
- $x^\alpha \times y^\alpha = \exp(\alpha\ln(x)) \times \exp(\alpha\ln(y)) = \exp(\alpha\ln(x) + \alpha\ln(y)) = \exp(\alpha(\ln(x) + \ln(y)))$.
  Comme $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \times y)$, il vient $x^\alpha \times y^\alpha = \exp(\alpha\ln(x \times y)) = (x \times y)^\alpha$.
- $x^\alpha \times y^\alpha = \exp(\beta\ln(x^\alpha)) = \exp(\beta\alpha\ln(x)) = x^{\alpha\beta}$.
- $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = \exp(\alpha\ln(x)) \times \exp(-\beta\ln(x)) = \exp(\alpha\ln(x) - \beta\ln(x)) = \exp((\alpha-\beta)\ln(x)) = x^{\alpha-\beta}$.
- $\frac{x^\alpha}{y^\beta} = \exp(\alpha\ln(x)) \times \exp(-\alpha\ln(y)) = \exp(\alpha\ln(x) - \alpha\ln(y)) = \exp\left(\alpha\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$. ▲

Théorème 9.12.— Limites des fonctions puissances —. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $x \in \mathbb{R}^{+\star}$.

- Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$
- Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$

Démonstration ▽
Écrivons $x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x))$. Les limites se déduisent de celles de l'exponentielle, au moyen du changement de variable $y(x) = \alpha\ln(x)$.
Lorsque $\alpha > 0$

Limite en 0 : $\left.\begin{array}{l} y(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \\ \exp(y) \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0 \end{array}\right)$. Par composition de limites, il vient $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$.

Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{r} y(x) = \alpha\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\ \exp(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty \end{array}\right)$ Par composition de limites, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$.

Lorsque $\alpha < 0$

Limite en 0 : $\left.\begin{array}{r} y(x) = \alpha\ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty \\ \exp(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty \end{array}\right)$ Par composition de limites, il vient $\lim\limits_{x\to0} x^{\alpha} = +\infty$.

Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{r} y(x) = \alpha\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty \\ \exp(y) \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0 \end{array}\right)$ Par composition de limites, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 0$. ▲

Variations et représentation graphique des fonctions puissances d'exposant α

Proposition 9.13.— Pour tout α, la fonction p_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$

$$\boxed{p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Sens de variation

- Dans le cas où $\alpha = 0$, la fonction $p_0(x) = x^0 = 1$ est constante sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
- Dans le cas où $\alpha \neq 0$, $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ est du signe de α sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

D'où les tableaux de variation suivants :

$\alpha > 0$

x	0		$+\infty$
$p_\alpha(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\alpha < 0$

x	0		$+\infty$
$p_\alpha(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Allure des courbes représentatives des fonctions puissance