Chapitre **2**

Nombres complexes : point de vue géométrique

La représentation plane des nombres complexes, introduite au début du XIX^{e} siècle, permet des résolutions géométriques, en particulier grâce à la notion d'affixe. Il faut bien savoir manier le passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique que seule une bonne vision géométrique permet de faire aisément.

Un mathématicien

D'origine suisse mais installé rapidement en France, Jean-Robert **Argand** (1768-1822) était un libraire passionné des idées révolutionnaires. S'intéressant aux nombres complexes, il publie un opuscule, *Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, dans lequel il présente la vision géométrique de ces nombres. Cependant son ouvrage, publié à compte d'auteur, ne mentionne même pas son nom ! Il en envoie une copie à Adrien-Marie **Legendre** qui le donne au mathématicien François **Français**. Malheureusement celui-ci meurt peu après. Son frère Jacques retrouve ce texte et comprend tout de suite son intérêt. Il écrit en 1813 un article sur ce thème dans le *Journal de Gergonne* en précisant que l'idée provient d'un mathématicien inconnu. Argand dévoile alors qu'il en est l'auteur.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Le Norvégien devenu danois, Caspar **Wessel** (1745-1818) rédige en 1797 un essai dans lequel il introduit, le premier, l'interprétation géométrique des nombres complexes. Celui-ci ne sera publié que deux ans plus tard par l'Académie royale des sciences du Danemark. Cet article reste inconnu des mathématiciens de son époque. Il n'est retrouvé qu'en 1897 ; son compatriote Sophus **Lie** le fait alors publier en traduction française sous le titre *Essai sur la représentation analytique de la direction*.

COMPÉTENCES

■ les incontournables

- Représenter un nombre complexe par un point
- Déterminer l'affixe d'un point
- Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe
- Mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique
- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement

■ et plus si affinités

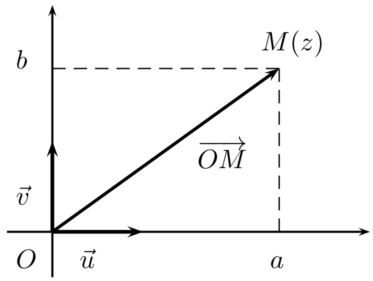
- Utiliser les nombres complexes pour interpréter un problème géométrique simple
- Étudier une récurrente de nombres complexes

Résumé de cours

Image d'un nombre complexe, affixe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$

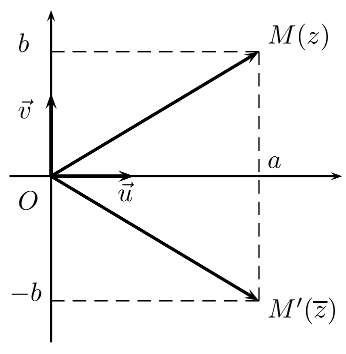
Définition : *À tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on associe le point M du plan de coordonnées (a, b) dans le repère $\mathcal{R}$. On dit que M est* **l'image** *de z et que z est* **l'affixe** *du point M. De même, on dit que z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.*



Vocabulaire : *l'axe des abscisses est aussi appelé axe des réels. De même, l'axe des ordonnées est appelé axe des imaginaires purs.*

Théorème 2.1.— Soit M un point d'affixe z et M' un point d'affixe z'. Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$.

Proposition 2.2.— Soit M un point du plan d'affixe $z = a+ib$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Le point M' d'affixe $\overline{z} = a - ib$ est le symétrique du point M par rapport à l'axe des abscisses.



■ Module d'un nombre complexe

Définition : *Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) un nombre complexe. On appelle* **module** *de z et on note $|z|$ le réel positif défini par :*

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Remarque : le module d'un réel est égal à sa valeur absolue.

Si M a pour coordonnées (a, b) dans le repère $\mathcal{R}$, alors $OM = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Cela nous donne l'interprétation géométrique du module.

Théorème 2.3.— Interprétation géométrique du module —. Soit M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'. Alors $MM' = |z' - z|$. En particulier, $OM = |z|$.

Théorème 2.4.— Pour tout nombre complexe z, on a :

$$\boxed{|z|^2 = z\,\overline{z}}$$

Proposition 2.5.— Propriétés du module —. Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $|\overline{z}| = z$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- Pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$

■ Ensemble des nombres complexes de module 1

Notation : *l'ensemble des nombres complexes de module 1 se note $\mathbb{U}$.*

Théorème 2.6.— Soit z et z' deux nombres complexes de module 1. Alors :

- $|z\,z'| = 1$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$

Remarque : le théorème précédent traduit la stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse. Si z et z' sont deux éléments de $\mathbb{U}$, alors zz' et $\frac{1}{z}$ aussi.

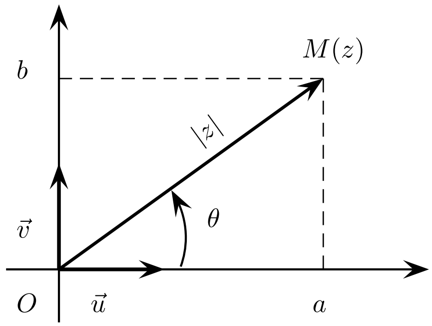
Théorème 2.7.— Caractérisation des éléments de $\mathbb{U}$ —.

- Tout nombre complexe de la forme $\cos\theta + i\sin\theta$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$) est de module 1.
- Réciproquement, tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme $\cos\theta + i\sin\theta$, où θ est un réel.

Remarque : ainsi, $z \in \mathbb{U}$ si, et seulement si, il existe réel θ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

■ Arguments d'un nombre complexe non nul

Définition : *Soit z un nombre complexe non nul. On appelle* **argument** *de z toute mesure (en radians) θ de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.*



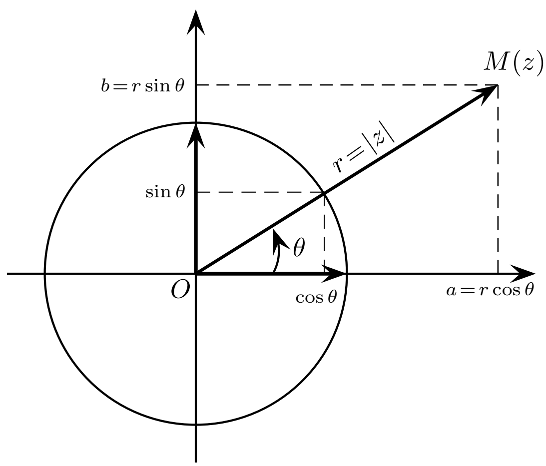
Remarque : un nombre complexe non nul admet une **infinité** d'arguments. Si θ_0 est un argument de z, les arguments de z sont tous les réels de la forme $\theta_0 + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

■ Forme trigonométrique

Théorème-Définition 2.8.— Soit z un nombre complexe non nul. Il existe un couple (r, θ), avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** de z.



Remarque : dans l'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, r est le module de z et θ un argument de z. Comme z admet une infinité d'arguments, la forme trigonométrique n'est pas unique (contrairement à la forme algébrique).

Démonstrations

Formule $|z|^2 = z\overline{z}$

Théorème 2.4.— Pour tout nombre complexe z, on a :

$$\boxed{|z|^2 = z\,\overline{z}}$$

Démonstration ▽
Rappelons que, pour un nombre complexe $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on a $\overline{z} = a - ib$.
Par ailleurs, par définition du module, on a :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Par conséquent,

$$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$$

Or,

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2\,.$$

Ainsi, on a bien $|z|^2 = z\overline{z}$. ▲

Propriétés du module

Il s'agit de démontrer la **proposition 2.5**.

Proposition 2.5.— Propriétés du module —. Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $|\overline{z}| = z$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- Pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$

Démonstration ▽
D'après le **théorème 2.4** démontré ci-dessus, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

$\boxed{1}$ **Module d'un conjugué**
Soit z un nombre complexe. Comme $\overline{\overline{z}} = z$, on a :

$$|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z}\,\overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}z} = \sqrt{z\overline{z}} = |z|$$

ce qui montre qu'un nombre complexe et son conjugué ont même module.

$\boxed{2}$ **Nullité du module**
Si z est un nombre complexe, on a :

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Leftrightarrow |z|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \overline{z} = 0 \end{aligned}$$

Mais, dire que z est nul équivaut à dire que $\overline{z}$ est nul. En effet, en notant $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on a $\overline{z} = a - ib$ donc $\overline{z} = 0$ si, et seulement si, $a = 0$ et $-b = 0$, soit $a = 0$ et $b = 0$ ou encore $z = 0$. Ainsi,

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$\boxed{3}$ **Module d'un produit**
Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

$$|zz'| = \sqrt{(zz')\overline{zz'}}.$$

Or, $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ donc :

$$|zz'| = \sqrt{zz'\overline{z}\overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}z'\overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}} \times \sqrt{z'\overline{z'}} = |z| \times |z'|,$$

et on a bien démontré que le module d'un produit est égal au produit des modules.

$\boxed{4}$ **Module d'un inverse**
Soit z un nombre complexe non nul. D'après l'égalité donnant le module d'un produit que nous venons de démontrer, on a :

$$\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|$$

Or, $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z}{z}\right| = |1| = 1$, d'où :

$$|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = 1$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$\boxed{5}$ **Module d'un quotient**
Pour démontrer cette égalité, nous allons utiliser les deux propriétés précédentes. En effet, faire un quotient c'est multiplier par l'inverse. Soit z et z' deux nombres complexes avec $z' \neq 0$. On a :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \left|\frac{z}{z'}\right|$$

ce qui montre que le module d'un quotient est égal au quotient des modules.

$\boxed{6}$ **Module d'une puissance**
Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\mathcal{P}(n) : \ll \ |z^n| = |z|^n \ \gg .$$

Initialisation : On a $|z^0| = |1| = 1 = |z|^0$, ce qui montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, soit $|z^n| = |z|^n$.
En appliquant la formule donnant le module d'un produit, on a alors :

$$|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n| \times |z|.$$

Mais, d'après $\mathcal{P}(n)$, on a $|z^n| = |z|^n$, d'où :

$$|z^{n+1}| = |z|^n \times |z| = |z|^{n+1},$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

Méthodes

Représentation des nombres complexes

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$

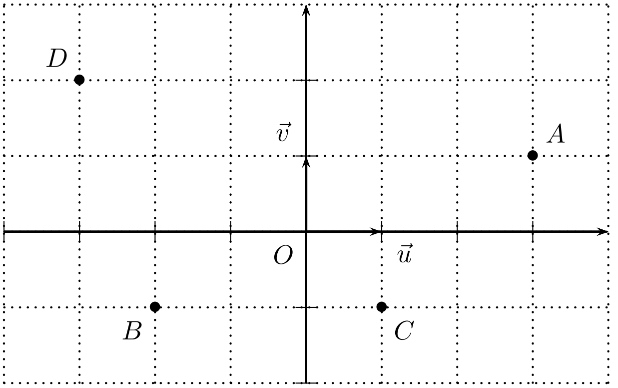
Méthode 2.1.— Comment représenter un nombre complexe dans le plan

Au nombre complexe $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) correspond le point M du plan de coordonnées (a, b) dans le repère $\mathcal{R}$. Le point M est l'image de z et le nombre complexe z est l'affixe du point M.

- Pour représenter le complexe $z = a + ib$, on place le point M de coordonnées (a, b).
- L'affixe du point M de coordonnées (a, b) est le nombre complexe $z = a + ib$.

Exemple : dans la figure ci-dessous,

- les points d'affixes respectives $z_A = 3 + i$ et $z_B = -2 - i$ sont les points $A\,(3, 1)$ et $B\,(-2, -1)$;
- les affixes respectives des points $C\,(1, -1)$ et $D\,(-3, 2)$ sont $z_C = 1 - i$ et $z_D = -3 + 2i$.



Mise en œuvre : exercice 2.1, exercice 2.2.

Module

Méthode 2.2.— Comment calculer le module d'un nombre complexe

Pour calculer le module d'un nombre complexe dont on connaît la forme algébrique $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, on applique simplement la formule :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Exemple : le module du nombre complexe $z = 1 + 3i$ est $|z| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}\,.$

Mise en œuvre : exercice 2.3, exercice 2.4.