Je révise et je me perfectionne

I. Fonction dérivable en un point

1) Nombre dérivé

Définition du taux d'accroissement

On considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant deux nombres a et b distincts.
On appelle *taux d'accroissement de la fonction f entre a et b* le réel t tel que :

$$t = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque 1.1

Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq a$, on peut aussi définir *le taux d'accroissement de la fonction f en a* (ou taux d'accroissement de f entre x et a) par le nombre réel t tel que :

$$t = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Lorsque $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, tel que $a + h \in I$, on peut aussi définir *le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a + h$* par le nombre réel t tel que :

$$\begin{aligned} t &= \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \end{aligned}$$

Il s'agit de ce taux d'accroissement que nous allons utiliser par la suite.

Exemple 1.2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.
Calculons, en fonction de h, le taux d'accroissement de la fonction f entre 3 et $3 + h$ où h est un réel non nul.

On a :

$$\begin{aligned} f(3) &= -3^2 + 4 \\ &= -9 + 4 \\ &= -5. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} f(3+h) &= -(3+h)^2 + 4 \\ &= -(9 + 6h + h^2) + 4 \\ &= -h^2 - 6h - 5. \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} t &= \frac{f(3+h) - f(3)}{3+h-3} \\ &= \frac{-h^2 - 6h - 5 - (-5)}{h} \\ &= \frac{h(-h-6)}{h} \\ &= -h - 6. \end{aligned}$$

Le taux d'accroissement de f entre 3 et $3+h$ est $-h-6$.

Définition du nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.
On dit que la fonction f *est dérivable en* a si et seulement si le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, se rapproche d'un nombre réel fini lorsque h tend vers zéro.
Ce nombre est appelé *nombre dérivé de* f *en* a, on le note $f'(a)$ et on écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarque 1.3

On aurait aussi pu définir *le nombre dérivé de* f *en* a de la manière suivante :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En effet, en posant $x = a + h$ dans le quotient ci-dessus, on a :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On retrouve alors le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$.
De plus, dire que « h se rapproche de 0 », c'est-à-dire « $a+h$ se rapproche de a » revient à dire que « x se rapproche de a ».

Focus 1.4

En pratique, lorsqu'on veut calculer un nombre dérivé $f'(a)$, on procède de la manière suivante :

1. On calcule $f(a)$ et $f(a+h)$, où $h \in \mathbb{R}^*$ et $a+h \in D_f$.
2. On calcule et simplifie au maximum le taux d'accroissement
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$
3. On fait tendre h vers 0 et on en déduit la limite du taux d'accroissement précédemment calculé.
   Si le taux d'accroissement est simplifié au maximum, il suffira, en général, de remplacer h par 0 et en déduire $f'(a)$.

On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2+4$.
Montrons que f est dérivable en 1 et calculons $f'(1)$.

1. On calcule $f(1)$ et $f(1+h)$, où $h \in \mathbb{R}^*$:
   On a $f(1) = 3$.
   De plus, on a :
$$\begin{aligned} f(1+h) &= -(1+h)^2+4 \\ &= -h^2-2h+3. \end{aligned}$$
2. On note t le taux d'accroissement de $f$entre 1 et $1+h$:
   On a :
$$\begin{aligned} t &= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \frac{-h^2-2h}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(-h-2)}{\cancel{h}} \\ &= -h-2. \end{aligned}$$
3. Ici on peut remplacer h par 0 :
   On a $\lim\limits_{h\to 0} -h-2 = -2$.

Donc, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -2$$

Ainsi la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1)$ vaut -2.

Remarque 1.5

Une fonction ne peut être dérivable qu'en un point a où elle est définie. En revanche, une fonction définie en un point a n'est pas forcément dérivable en ce point.
Etudions alors deux exemples classiques pour illustrer ce résultat.

◦ Dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

Prenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Cette fonction f est bien définie en 0.
Nous allons voir que cette dernière n'est pas dérivable en 0 :
Soit $h > 0$. On calcule alors le taux d'accroissement de f entre 0 et $0 + h$:

$$\begin{aligned} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}. \end{aligned}$$

On voit que lorsque h tend vers 0, le réel $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus grand.

$\xleftarrow{\quad h \text{ tend vers } 0 \quad}$

h	0	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
$\dfrac{1}{\sqrt{h}}$	ERR	316	100	$31,6$	10	$3,2$

$\xleftarrow[\quad \frac{1}{\sqrt{h}} \text{ tend vers } +\infty \quad]{}$

On note alors :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Cette limite est infinie et donc f n'est pas dérivable en 0.

○ Dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0

Prenons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x|$.
Cette fonction est bien définie en 0.
Nous allons démontrer que cette fonction n'est pas dérivable en 0.
Calculons alors le taux d'accroissement de g entre 0 et $0 + h$:

$$\begin{aligned}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} &= \frac{|0+h|-|0|}{h} \\ &= \frac{|h|}{h}\end{aligned}$$

Etudions le résultat de ce taux d'accroissement selon le signe de h :

- Si $h > 0$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} &= \frac{|h|}{h} \\ &= \frac{h}{h} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = 1.$$

- Si $h < 0$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} &= \frac{|h|}{h} \\ &= \frac{-h}{h} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = -1.$$

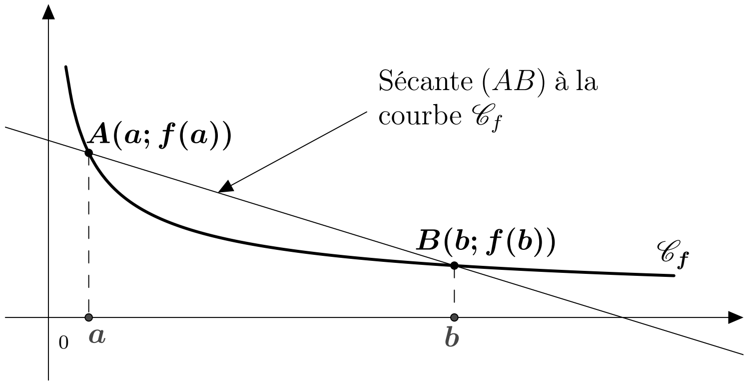
Finalement, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}$ ne peut exister et la fonction g n'est pas dérivable en 0.

2) Interprétation géométrique

Interprétation graphique 1.6

On considère une fonction f dont on donne sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$.

On place deux A et B d'abscisse respective a et b sur $\mathscr{C}_f$ et on trace la droite (AB).
Graphiquement, le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b représente le coefficient directeur d'une sécante à la courbe représentative de la fonction f.



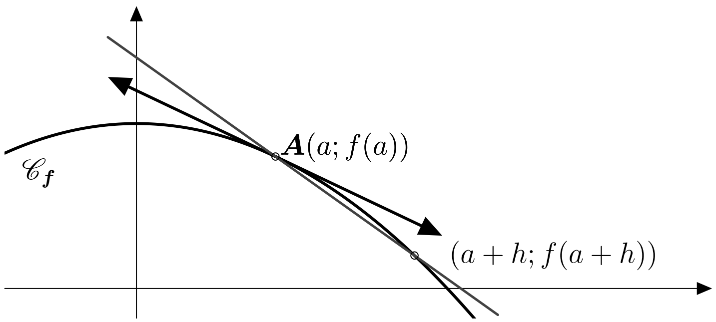
Cette sécante (AB) a bien pour coeffcient directeur $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Définition de la tangente à une courbe

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ *au point* $A(a; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Interprétation graphique 1.7

Comme une sécante a pour coeffcient directeur un taux d'accroissement et que le nombre dérivé est un taux d'accroissement limite, on peut définir la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a comme une sécante limite ayant pour coeffcient directeur le nombre dérivé de f en a.



Cette tangente est symbolisée par un segment à double flèche.

Propriété 1.8

L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration

On considère $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
Le coeffcient directeur de cette tangente $\mathcal{T}$ est $f'(a)$. Ainsi une équation de la tangente $\mathcal{T}$ est :

$$y = f'(a)x + p \quad (p \in \mathbb{R}).$$

Or $A(a; f(a)) \in \mathcal{T}$ donc, on a :

$$f(a) = f'(a)a + p.$$

On trouve alors :

$$p = f(a) - f'(a)a.$$

Ainsi, on a :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \iff y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ est donc $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exemple 1.9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.
Déterminons l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe représentative de la fonction f.
Dans l'exemple du Focus précédent, on a vu que f est dérivable en 1 avec $f'(1) = -2$ et $f(1) = 3$.
Or l'équation de cette tangente est :

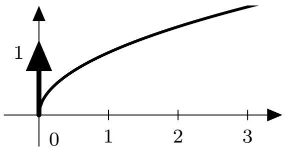
$$\begin{aligned} y = f'(1)(x-1) + f(1) &\iff y = -2(x-1) + 3 \\ &\iff y = -2x + 5. \end{aligned}$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de la fonction f est $y = -2x + 5$.

Remarque 1.10

On a vu que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
En effet, on a $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$.

La courbe représentative de la fonction carrée admet donc une demi-tangente verticale en 0.



II. Fontion dérivable sur un intervalle

Définition d'une fonction dérivable sur un intervalle

Une fonction f *est dérivable sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout point de I (i.e. lorsque pour tout $x \in I$, $f'(x)$ existe). Ainsi, la fonction qui à tout $x \in I$ associe $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée de* f et est notée f'.

Exemple 1.11

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et et $h \neq 0$.
On a :

$$\begin{aligned} g(x+h) &= (x+h)^2 \\ &= h^2 + 2xh + x^2. \end{aligned}$$

Soit t le taux d'accroissement de la fonction f entre x et $x+h$.
On a :

$$\begin{aligned} t &= \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{h^2 + 2xh}{h} \\ &= h + 2x. \end{aligned}$$

De plus, on a $\lim\limits_{h \to 0} h + 2x = 2x$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = 2x$.