1

L'agent économique face au risque

Au-delà de l'existence même d'une possible évaluation de l'utilité (satisfaction), il convient de considérer que méconnaissant, a priori, les caractéristiques des produits, le consommateur ne peut connaître, à l'avance, l'utilité procurée par un bien. Comment, dès lors, démuni d'informations, peut-il intégrer ce bien dans son panier afin de maximiser son utilité ? Cette réflexion peut s'appliquer à l'ensemble des agents économiques. C'est pourquoi, l'analyse du comportement des agents économiques doit se réaliser en supposant que celui-ci évolue dans un univers où il doit raisonner dans un environnement incertain.

Risques et incertitudes

Une *action* est dite *risquée* s'il est possible de lister l'ensemble des évènements qui en découlent et d'assigner, à chacun d'entre eux, une probabilité d'occurrence. Un jet de dé est, par exemple, risqué si le lanceur ne connait pas, avec certitude, la face qui va sortir. Il peut toutefois calculer la probabilité d'apparition d'une des six faces.

Face au risque quantifiable, la notion d'*incertitude* est source d'instabilité pour l'agent économique. En effet, une *action* est *incertaine* lorsqu'il est impossible de quantifier ses états de la nature[1]. Ainsi, il est impossible d'associer une probabilité sur une éventuelle baisse des taxes dans les dix prochaines années. Cette décision appartient à un prochain gouvernement dont l'élection est, elle-même, incertaine.

A. La valeur espérée en cas d'incertitude

Afin de tenir compte du risque qu'il encourt, l'agent économique va s'appuyer sur les probabilités associées aux différents états de la nature de manière à calculer la valeur espérée de son projet. Au même titre qu'une espérance mathématique, la *valeur espérée* d'un projet considère le résultat des différents états de la nature pondérés par leur probabilité respective. Elle est égale à : $\sum_{i \in I} Ri * Pi$ avec Ri le revenu apporté par l'état de la nature i et Pi la probabilité associée.

Illustration

Soit un projet d'entreprise dont les espérances de gain et les probabilités associées sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Profit du projet	5 000 €	10 000 €	45 000 €
Probabilité associée	1/6	2/3	1/6

L'espérance d'utilité du projet (taux de rendement moyen) est alors égale à

$$(1/6) * 5\,000 + (2/3) * 10\,000 + (1/6) * 45\,000 = 15\,000 \text{ €}$$

Outre la valeur monétaire, cette information indique à l'investisseur, le montant initial qu'il doit investir pour réaliser un profit.

1. Tout évènement aléatoire pouvant se réaliser est appelé un « état de la nature ». Une action risquée a donc des états de la nature dont les risques respectifs sont quantifiables par l'agent qui l'occasionne.

Si la valeur espérée est un critère de décision en situation risquée, un autre paramètre essentiel est à prendre en compte : la variabilité/volatilité des gains.

B. La volatilité

La volatilité mesure la variabilité des résultats d'un processus aléatoire associés aux différents états de la nature. Une grande variabilité illustre l'importance du risque encouru. Ainsi, un projet offrant la possibilité de réaliser un profit de 240 000 euros avec une probabilité de 1/10 et d'enregistrer une perte de 10 000 euros avec une probabilité de 9/10 paraît très risqué malgré une valeur espérée positive. En finance, la volatilité d'un actif représente l'écart entre les résultats de la nature et la valeur espérée moyenne du titre financier.

Au plan mathématique, la volatilité est égale à l'écart-type i.e. la racine carrée de la variance

$$\sum_{i \in I} \sqrt{i * (Xi - E(\overline{X})^2} = \sqrt{V(X)}$$

Comparons le projet étudié précédemment à un second dont les états de la nature sont les suivants :

Profit du projet	1 000 €	43 000 €	1 000 €
Probabilité associée	1/3	1/3	1/3

L'espérance de gain du projet est alors égale à :

$$(1/3) * 1\,000 + (1/3) * 43\,000 + (1/3) * 1\,000 = 15\,000 \text{ €}$$

c'est-à-dire égale au premier projet.

Sur la base uniquement de l'espérance de gain, nous pourrions donc affirmer que l'entrepreneur est indifférent aux deux projets.

Toutefois, en calculant la variabilité des deux projets, nous observons que la dispersion du second projet est beaucoup plus élevée malgré une même espérance.

Écart type du premier projet :

$$[1/6 * (5\,000 - 15\,000)^2 + 2/3 * (10\,000 - 15\,000)^2 + 1/6 * (45\,000 - 15\,000)^2]^{1/2}$$
$$= 13\,540{,}1$$

Écart type du second projet :

$$[1/3 * (1\,000 - 15\,000)^2 + 1/3 * (43\,000 - 15\,000)^2 + 1/3 * (1\,000 - 15\,000)^2]^{1/2}$$
$$= 34\,292{,}9$$

Sur la base de ce second critère, un chef d'entreprise rationnel visant à maximiser de son profit tout en minimisant son risque choisira, parmi deux projets de même gain potentiel, celui dont la volatilité est la moins importante.

C. L'espérance d'utilité

Cette dernière occurrence (projets ayant la même espérance de gain) est peu fréquente. La situation la plus courante est celle d'un arbitrage entre risque et espérance de gain.

Comment un entrepreneur doit-il choisir un projet lorsque les gains et leur variabilité sont différents ? Doit-il opter pour le projet le plus risqué et le plus rémunérateur ou préférer un projet, plus raisonnable en termes de risque, mais ayant une faible rentabilité ? Ainsi, à partir des données suivantes, quel projet doit-il choisir ?

Valeur espérée	10 000 €	25 000 €
Écart-type du projet	5 000	12 000

Il ne vous échappera pas qu'il existe dans la réponse une part assez subjective. Certaines personnes sont plus averses au risque que d'autres (Cf. Paradoxe de Saint Pétersbourg de Bernoulli). Leur acception du risque se matérialise par une fonction d'utilité différente.

D. Le taux marginal de substitution

Afin de réaliser son choix optimal, un individu doit prendre en compte l'espérance de gain, son risque et les probabilités afférentes. Il existe un point où il optimise son choix en univers risqué i.e. en ce point, il est indifférent à deux choix : gain élevé avec une probabilité faible ou faible gain avec une probabilité forte.

Afin de trouver ce point d'indifférence compte tenu des paramètres du jeu, la démarche du *taux marginal de substitution*[1] peut être utilisée.

Illustration

Considérons un jeu procurant un gain X avec une probabilité p et un revenu Y avec une probabilité (1 – p). Supposons que l'utilité du consommateur égalise, en situation incertaine, l'espérance des gains du jeu.

1. Le taux marginal de substitution est le taux selon lequel le consommateur substitue une quantité du bien X par une quantité du bien Y, tout en gardant fixe le même niveau de satisfaction.

Nous avons

$$dU (X, Y) = dE (U (X, Y)) = [p * dU (X)/dX] + [(1 - p) dU (Y)/dY] = 0$$

$$\Leftrightarrow -dX/dY = [(1 - p) dU (Y)]/[p * dU(X)]$$

Ainsi, le taux marginal de substitution égalise le rapport des probabilités d'apparition des deux états de la nature.

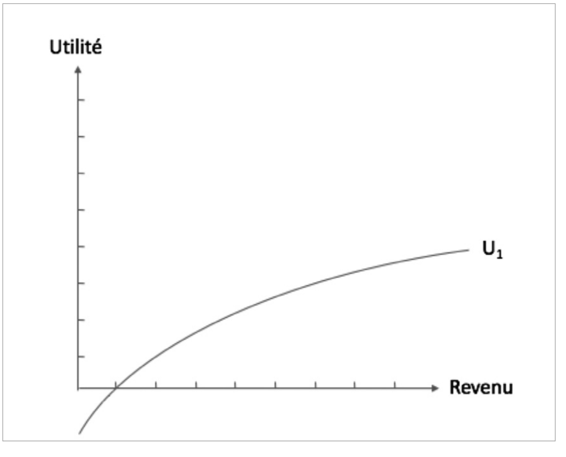
$$TMS = (1 - p)/p$$

Cette relation, utile dans la mesure où la fonction d'espérance d'utilité n'étant pas toujours linéaire, indique, en présence de deux évènements, la probabilité permettant d'atteindre l'utilité maximale de l'agent économique.

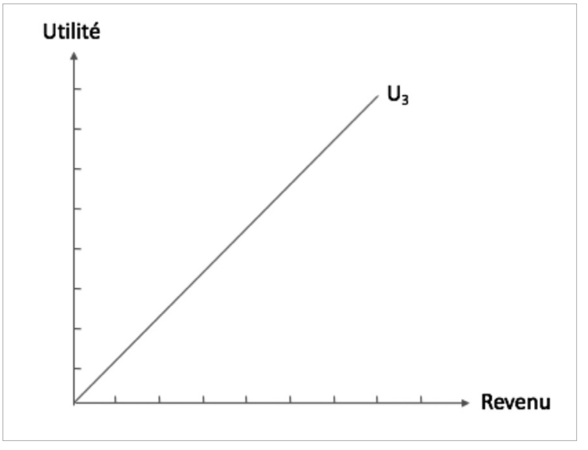
E. Le profil des joueurs

Chaque individu doit connaître son profil de risque afin de déterminer le choix optimal maximisant son profit.

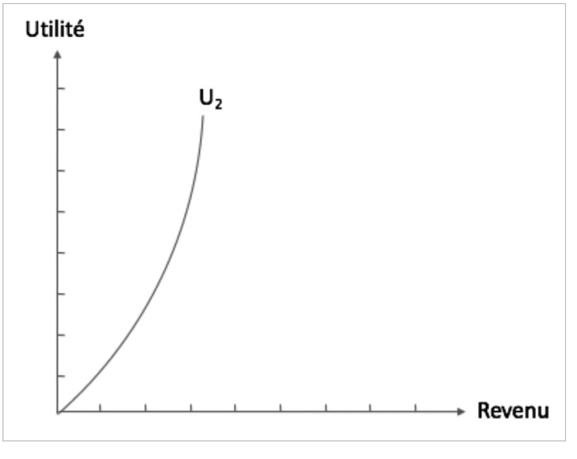
Un agent *avers au risque* voit son utilité se ralentir avec une espérance du gain élevée ayant une probabilité faible de survenir. La courbe d'espérance d'utilité est concave et la dérivée seconde de cette fonction est négative.



Un agent *neutre au risque* voit son utilité croître à la même vitesse que le gain moyen espéré. La courbe de la fonction d'espérance d'utilité est linéaire et l'agent est indifférent à prendre le risque ou non. Sa fonction d'utilité est donc U(X) = E(X).



Un agent ayant *un profil de risque élevé* s'orientera vers des situations aux gains et risques importants. Son utilité croît de plus en plus vite avec l'espérance de gain. La courbe de la fonction d'utilité est convexe. La dérivée seconde de cette fonction est alors positive.



F. La prime de risque

L'agent économique réalise un arbitrage en prenant comme critères de décision, le risque et l'espérance d'utilité (rendement). Le différentiel perçu de valeur permet d'estimer la valeur attribuée par l'agent au risque encouru.

L'utilisation de la notion d'équivalent (cf. utilité indirecte) facilite le calcul de la valeur monétaire du risque. Elle permet de trouver le niveau de richesse certain correspondant à l'espérance d'utilité d'un niveau de richesse incertain afin de maintenir, au même niveau, l'utilité de l'agent (Le raisonnement s'effectue en termes de richesse totale et non en termes de gain).

Au plan mathématique, l'équivalent certain ($\underline{X}$) du taux de rendement se définit comme le point où l'utilité d'une richesse certaine égalise l'espérance d'utilité incertaine :

$$\boxed{U(\underline{X}) = E(U(X))}$$

L'expression de X est obtenue en calculant la fonction inverse

$$\boxed{\Leftrightarrow \underline{X} = U\,[E(U(X))]^{-1}}$$

Illustration

La fonction d'utilité d'un individu est $U(X) = X^{1/2}$. Il a une richesse initiale de 10 euros. Il participe à une loterie pouvant lui rapporter 100 € avec 25 % de chance ou lui faire perdre 5 € avec une probabilité de 75 %. À l'instant initial, la richesse de l'individu est de 10 €.

S'il joue à la loterie, l'espérance d'utilité est de :

$$E(U(X)) = U(110) * 0{,}25 + U(5) * 0{,}75 = 4{,}3$$

S'il souhaite avoir cette utilité de manière certaine i.e. sans avoir à jouer, il lui faudrait avoir un revenu initial de :

$$[U(4{,}3)]^{-1} = 18{,}49 \text{ €}$$ [1]

Ainsi, à une espérance d'utilité de 4,3 correspond une richesse initiale de 18,49 euros i.e. un individu sera donc indifférent entre garder sa richesse de 18,49 € et acheter le jeu : son utilité serait la même.

S'il venait à participer au jeu, il pourrait espérer gagner :

$$E(X) = 0{,}25 * 110 + 0{,}75 * 5 = 31{,}25 \text{ €}$$

1. La fonction inverse de la racine carrée est x^2.

L'individu serait donc indifférent entre jouer et recevoir 18,49 € mais l'espérance mathématique du jeu peut être positive, représentant un manque à gagner potentiel pour le joueur.

S'il renonçait à jouer, sa prudence lui serait donc perdre : 31,25 – 18,49 = 12,76 euros

À ce point d'indifférence, l'individu valorise les deux options de la même manière. Le différentiel de gain (12,76 €) représente la *prime de risque* i.e. comment il valorise le risque, qui évolue en fonction du profil de l'individu et du type de risque qu'il encourt.

– Si la *prime de risque* (différence entre l'espérance de gain et le gain certain) est *positive*, l'individu est prêt à payer une somme pour participer au jeu à la condition que le rendement attendu soit supérieur à celui d'un placement non risqué (utilité de l'espérance de gain du jeu supérieure à l'espérance d'utilité du joueur). Nous avons :

$$E(X) - \underline{X} > 0 \Leftrightarrow E(X) > \underline{X} \Leftrightarrow E(X) > U[E(u(X))]^{-1}$$

$$\Leftrightarrow U[E(X)] > E(U(X))$$

– Si la *prime de risque* est *nulle*, l'individu est indifférent au risque : son utilité n'est pas modifiée par le fait de jouer ou non (utilité de l'espérance de gain du jeu égale à l'espérance d'utilité du joueur). Nous avons :

$$E(X) - \underline{X} = 0 \Leftrightarrow U[E(X)] = E(U(X))$$

– Si la *prime de risque* est *négative*, l'individu est prêt à payer une somme pour jouer à un jeu risqué i.e. l'espérance de gain est supérieure à son équivalent certain (utilité de l'espérance de gain du jeu inférieure à l'espérance d'utilité du joueur). Nous avons :

$$E(X) - \underline{X} < 0 \Leftrightarrow U[E(X)] < E(U(X))$$

G. Les types de risque

Trois types de risque sont généralement distingués, chacun ayant un modèle approprié de calcul :

a. Le risque additif, A

Ce risque s'ajoute/se soustrait à la richesse, W.

$$\boxed{W = w \pm A}$$

Un exemple est une loterie qui additionne au revenu, 10 euros en cas de victoire ou soustrait 5 euros en cas de perte.