CHAPITRE

1 THERMODYNAMIQUE

Liste des questions ouvertes

Survie d'une bactérie

Une bactérie *coccus* (forme sphérique) aérobie consomme le dioxygène atmosphérique qui se dissout dans l'eau selon l'équilibre de Henry $O_{2(g)} \rightleftharpoons O_{2(aq)}$.

Estimer la taille maximale d'une bactérie *coccus* aérobie.

Données :

- Le métabolisme du micro-organisme entraîne une consommation de dioxygène dissous dont la vitesse par unité de masse de bactérie est $v_m = 40\ \mu\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{g}^{-1}$.
- $O_{2(g)} \rightleftharpoons O_{2(aq)}$: $K^\circ = 1,3 \cdot 10^{-3}$.
- Le coefficient de diffusion du dioxygène dans l'eau est $D = 2 \cdot 10^{-9}\ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.
- Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$.
- Masses molaires : $\mathcal{M}_{O_2} = 32\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $\mathcal{M}_{H_2O} = 18\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

À savoir avant de commencer…

Rappeler la loi de Fick.

Pour des particules se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$, le vecteur densité volumique de courant particulaire est défini par :

$$\boxed{\vec{j} = n^* \vec{v}}$$

où n^* est la densité de particules.
Le flux de particules traversant une surface S par unité de temps est :

$$\Phi = \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Lorsque la densité particulaire du milieu n'est pas uniforme, il apparaît une diffusion des zones les plus concentrées vers celles de densité plus faible. La loi de Fick propose :

$$\boxed{\vec{j} = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\, n^*}$$

où D est le coefficient de diffusion des particules dans le milieu (en $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$).

Indications

- Exprimer le flux de dioxygène arrivant à la bactérie.
- Déterminer la densité particulaire de dioxygène en fonction de la distance à la bactérie.
- Que vaut la concentration en dioxygène dissous loin de la bactérie ?

Réponse

On s'intéresse à la répartition de la densité de dioxygène n^* en régime stationnaire en fonction de r (distance au centre de la bactérie). La consommation du dioxygène par la bactérie entraîne un gradient dans la solution entre le micro-organisme et une zone lointaine dont la concentration en dioxygène dissous obéit à la loi d'action des masses :

$$O_{2(g)} \rightleftharpoons O_{2(aq)} \Rightarrow Q = \frac{[O_{2(aq)}]P^{\circ}}{P_{O_{2(g)}}c^{\circ}} \underset{\acute{e}q.}{=} K^{\circ}$$

Loin de la bactérie la concentration en dioxygène dissous est :

$$c_\infty = [O_{2(aq)}] = \frac{P_{O_{2(g)}}K^{\circ}c^{\circ}}{P^{\circ}}$$

En prenant $P_{O_{2(g)}} = 0,2P^{\circ} = 0,2 \cdot 10^5$ Pa (l'air contient environ 20 % de dioxygène), une application numérique donne :

$$c_\infty = [O_{2(aq)}] = 0,26 \text{ mol}\cdot\text{m}^{-3}$$

Il faut ensuite examiner la répartition du dioxygène dissous en fonction de la distance r du centre de la bactérie. Plus une bactérie est grosse et plus elle est « gourmande » ce qui appauvrit son voisinage immédiat en dioxygène. La limite de viabilité s'obtient pour une concentration en dioxygène nulle à la limite de sa membrane plasmique.

En coordonnées sphériques, et étant donnée la symétrie du problème (invariance selon θ et φ) la loi de Fick s'écrit :

$$\vec{j}(r) = j(r)\vec{u}_r = -D\frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r$$

Le flux Φ de molécules de dioxygène traversant par unité de temps une sphère de rayon $r > R$ et de surface $S = 4\pi r^2$ est par définition :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S (j(r)\vec{u}_r)\cdot(\mathrm{d}S\vec{u}_r) = \iint_S j(r)\mathrm{d}S = j(r)\iint_S \mathrm{d}S = j(r)S = 4\pi r^2 j(r)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi = -D\frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r}4\pi r^2 < 0}$$

Rq $\Phi < 0$ car n^* croît lorsqu'on s'éloigne de la bactérie qui consomme le dioxygène. De même $\vec{j}$ est dirigé selon $-\vec{u}_r$, des zones les plus concentrées (loin de la bactérie) vers les zones les moins concentrées.

Par ailleurs, en régime stationnaire et en l'absence de termes de création ou d'absorption, le flux particulaire est uniforme, il est donc indépendant de r et sa valeur peut se déterminer en l'exprimant à la surface de la bactérie en $r = R$. En effet, en régime permanent, la bactérie consomme le dioxygène à sa surface avec une vitesse molaire v_m par unité de masse bactérienne, par conséquent $\Phi = -\mathcal{N}_A m v_m < 0$ où m est la masse d'une bactérie, c'est-à-dire : $m = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$. La masse volumique ρ de la bactérie est comparable à celle de l'eau.
Il apparaît finalement l'équation différentielle :

$$\Phi = -\mathcal{N}_A m v_m = -D\frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r}4\pi r^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{3}\mathcal{N}_A \rho R^3 v_m = D\frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r}r^2$$

Une séparation des variables permet d'intégrer cette expression entre la surface de la bactérie ($r = R$ et $n^* = n_S$) d'une part et l'infini d'autre part (très loin de la bactérie où $n^* \to n^*_\infty$).

$$\mathrm{d}n^* = \frac{\mathcal{N}_A \rho R^3 v_m}{3D} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \;\Rightarrow\; n^*_S = n^*_\infty - \frac{\mathcal{N}_A \rho R^3 v_m}{3DR}$$

En notant $c = n^*/\mathcal{N}_A$ les concentrations molaires, il vient :

$$c_S = c_\infty - \frac{\rho R^2 v_m}{3D}$$

La limite de viabilité d'une bactérie correspond à $c_S \to 0$ c'est-à-dire :

$$\frac{\rho R^2_{lim} v_m}{3D} \to c_\infty$$

Le rayon limite du *coccus* est alors :

$$\boxed{R_{lim} = \sqrt{\frac{3Dc_\infty}{\rho v_m}} \approx 6\ \mu\mathrm{m}}$$

La taille des bactéries se situe généralement entre 1 et 10 μm, c'est notamment pour cette raison qu'elles sont effectivement observables au microscope.

QUESTIONS OUVERTES

Évaporation d'eau

Un petit verre contenant un fond d'eau de 2 mm a été oublié sur une table dans une pièce à température ambiante $T = 20\,°\mathrm{C}$. Le baromètre indique une pression atmosphérique d'environ $P_{atm} = 1$ bar et l'hygromètre mesure une humidité relative (degré hygrométrique) de $\varphi = 30\,\%$.

Estimer la durée nécessaire à l'évaporation totale de l'eau.

Données :

- Géométrie du verre cylindrique : hauteur $H = 6,0$ cm, rayon $r = 2,5$ cm, épaisseur $e = 2$ mm.
- L'humidité relative de l'air correspond au rapport de la pression partielle de la vapeur d'eau contenue dans l'air sur la pression de vapeur saturante à la même température.
- Avec les unités de base du système international, le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air peut être approché par la formule semi-empirique :

$$D = 1,87 \cdot 10^{-5} \frac{T^{2,072}}{P} \text{ pour } T \in [280,\ 450]\ \mathrm{K}.$$

- La pression de vapeur saturante de l'eau dépend approximativement de la température selon la loi :

$$P_{sat} = \exp\left(13,7 - \frac{5\,120}{T}\right)$$

  où P_{sat} est en bar et T en K.
- Enthalpie massique de vaporisation de l'eau à $100\,°\mathrm{C}$ et sous la pression de 1 bar : $\Delta_{vap}h = 2,26\ \mathrm{MJ \cdot kg^{-1}}$.
- Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$.
- Masses molaires : $\mathcal{M}_{air} = 29\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$; $\mathcal{M}_{H_2O} = 18\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

Indication

Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, proposer une distribution spatiale de la densité de molécules d'eau après avoir présenté les conditions aux limites du verre.