Partie 1

Remise à niveau

Trois sujets sont proposés ici et sont traitables avec le niveau acquis en fin de Maths Sup'. Comportant des problèmes ayant globalement le niveau des concours CCINP, ils permettent de faire le point surtout sur les notions d'analyse réelle et sur les polynômes vus en première année, primordiales mais qui ne seront pas redétaillés en deuxième année.

Leurs structures diffèrent :

- ▷ le sujet 1 comporte deux problèmes et fait la part belle à l'analyse et l'aléatoire,
- ▷ le sujet 2 comporte un problème long sur les interpolateurs de Lagrange,
- ▷ le sujet 3 comporte deux exercices et un problème utilisant l'analyse numérique.

Entraînement n°1

Durée prévue : 4 heures.
Les deux problèmes sont indépendants.
Thèmes abordés : probabilités et dénombrement, polynômes, espaces vectoriels, analyse réelle, manipulations algébriques, suites numériques, séries numériques, dérivabilité.

I) *(Comportement asymptotique d'une espérance)*

1. 5 personnes attendent au rez-de-chaussée d'un immeuble de 7 étages pour se rendre à l'un des étages supérieurs. On suppose que toutes les personnes prennent l'ascenseur ensemble et l'étage auquel chacune descend est indépendant des étages auxquels se rendent les autres.

a) Déterminer le nombre de toutes les situations possibles quand les individus sont discernables.

b) Quelle est la probabilité que les étages où se rendent les cinq personnes soient tous distincts ?

c) Quelle est la probabilité qu'aucune de ces personnes ne descende au troisième étage ?

d) Quelle est la probabilité pour que l'étage le plus élevé de l'immeuble auquel descend au moins une des personnes soit le quatrième ?

e) Il y a soudain un problème d'électricité dans l'immeuble : on n'arrive plus à discerner qui est qui ! Déterminer le nouveau nombre de toutes les situations possibles.

f) Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre des étages où se rend au moins une des cinq personnes. On note, pour $i \in [\![1,7]\!]$, X_i la variable de Bernoulli prenant la valeur 1 si une des cinq personnes (au moins) descend à l'étage numéro i, et la valeur 0 dans le cas contraire.

- Exprimer X à l'aide des X_i, $1 \leq i \leq 7$.
- Calculer $\mathbb{E}(X)$, l'espérance de X.

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$. On suppose maintenant que m personnes attendent au rez-de-chaussée l'ascenseur, pour se rendre à l'un des étages supérieurs d'une tour de n étages et on fait les mêmes hypothèses d'indépendance que dans la première question. Soit X_n la variable aléatoire indiquant le nombre des étages où se rend au moins une des m personnes. On note Y_n la variable aléatoire indiquant l'étage le plus élevé de la tour auquel descend une des n personnes.

2.

a) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

b) On suppose ici que $m = n$. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{k^m-(k-1)^m}{n^m}$.

b) Montrer que l'espérance[1] de Y_n est donnée par
$$\mathbb{E}(Y_n) = n - \frac{1}{n^m}\sum_{l=1}^{n-1} l^m$$
On cherche maintenant un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ avec deux méthodes très différentes.

4.

a) Justifier que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{l}{n}\right)^m = \int_0^1 x^m \mathrm{d}x$$

b) En déduire que $\mathbb{E}(Y_n) \sim_{n\to\infty} \frac{nm}{m+1}$.

5. Soit $\Delta\colon \mathbb{R}[X] \longmapsto \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}, P \longmapsto \big(P(X+1)-P(X), P(0)\big)$.

a) Montrer que, si P est un polynôme non constant,
$$\deg\big(P(X+1)-P(X)\big) = \deg(P) - 1$$

b) En considérant éventuellement $\Delta_{\mathbb{R}_n[X]}$, démontrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme P tel que $\Delta(P) = (Q, 0)$.

On note alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, P_m l'unique polynôme existant à coefficients réels caractérisé par : $\forall x \in \mathbb{R}, P_m(x+1) - P_m(x) = x^m$ et $P_m(0) = 0$.

c) Préciser le degré de P_m et le coefficient dominant de P_m.

d) En déduire à nouveau que $\mathbb{E}(Y_n) \sim_{n\to\infty} \frac{nm}{m+1}$.

II) *(Problème de Bâle)* On souhaite déterminer la somme des inverses des carrés :
$$\zeta(2) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
On pose, pour tout entier n non nul, $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

1. On ré-établit dans cette question que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

a) Pour $k > 1$, préciser pourquoi $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

b) En déduire que la suite (u_n) converge.

2. On établit maintenant la valeur de $\zeta(2)$. Dans la limite, on voit l'apparition de π, il peut donc sembler intéressant de sortir des entiers et de passer aux complexes en faisant ainsi intervenir des fonctions trigonométriques.

a) On introduit la fonction $\cot : t \longmapsto \frac{1}{\tan t} = \frac{\cos t}{\sin t}$, définie sur $\mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

- Démontrer que la fonction cot est périodique, de période π.
- Démontrer que la fonction cot est bijective de $]0,\pi[$ vers $\mathbb{R}$.

[1] ***Ind.*** On pourra voir que pour $k \in [\![1,n]\!]$, $k(k^m - (k-1)^m) = k^{m+1} - (k-1)^{m+1} - (k-1)^m$.

- Montrer que[1] : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cot^2 x \le \frac{1}{x^2} \le \cot^2 x + 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer[2] un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \qquad P_n(\cot^2 x) = \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{(\sin x)^{2n+1}}$$

c) Préciser alors les racines du polynôme P_n trouvé.

d) Démontrer que la somme des racines de P_n permet de vérifier :

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

e) Conclure à l'aide du théorème des gendarmes et de la question **2.*a)***.

3. On propose une dernière façon pour appréhender le problème, totalement différente.

a) On établit ici le lemme de Riemann-Lebesgue. Montrer que si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, alors

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^b \varphi(t) \sin(\alpha t)\, \mathrm{d}t = 0$$

b) Trouver, en intégrant par parties, deux réels a et b tels que pour tout entier n non nul, on ait $\int_0^{\pi} (at^2 + bt) \cos(nt)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.

c) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R} - \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t$$

où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ que l'on précisera.

e) Conclure à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue.

– – – – –

[1] ***Ind.*** C'est le moment de se souvenir que $\sin x \le x \le \tan x$ et que $\frac{1}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x$.

[2] ***Ind.*** Il faut raisonner un peu comme avec les polynômes de Tchebychev, probablement déjà rencontrés. Commencez par écrire que $\sin((2n+1)x) = \Im((\cos x + \mathrm{i} \sin x)^{2n+1})$ et développez en utilisant la formule du binôme de Newton. Pour que les questions qui suivent soient faisables en cas de blocage ici, on donne le polynôme à trouver : $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{n-k}$.

Corrigé de l'Entraînement n°1

I)

1. On munit l'univers de l'ensemble des configurations d'étage de la probabilité uniforme.

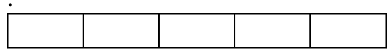
a) Il y a $\boxed{7^5}$ configurations possibles.

b) La première personne peut choisir 7 étages, la seconde 6 étages, la troisième 5 étages, la quatrième 4 étages et la dernière 3 étages. L'hypothèse d'indépendance entraîne qu'en tout, il y a $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{7!}{2!}$ possibilités. Donc la probabilité cherchée vaut $\boxed{\frac{7!}{2!7^5}}$.

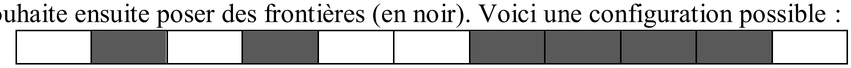
c) Si personne ne descend au troisième étage, il n'y a que 6 étages possibles donc en tout 6^5 possibilités. Donc la probabilité cherchée vaut $\boxed{\frac{6^5}{7^5}}$.

d) L'évènement « L'étage le plus élevé de l'immeuble auquel descend au moins une des personnes est le quatrième » est l'intersection des évènements « Une des cinq personnes descend au quatrième étage » et « Les quatre autres personnes descendent à un étage inférieur ou égal au quatrième » : en tout $1 \times 4^4 \times 5$ possibilités en effectuant les permutations sur les cinq personnes envisagées : la probabilité cherchée vaut donc $\boxed{\frac{5\times 4^4}{7^5}}$.

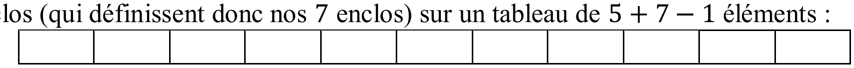
e) Sous ses airs triviaux, cette question est assez subtile. Concrètement, on veut savoir comment répartir 5 individus indiscernables à 7 étages alors qu'à la première question, on les discernait.
Par exemple, si Aimery, Kenza, Raphaël, Louis et Benoît se rendent aux étages respectifs 1, 2, 3, 4, 5, c'est une configuration différente que s'ils se rendent aux étages 5, 4, 3, 2, 1. En revanche, si on ne sait pas les discerner (imaginons qu'ils soient dans le noir), on peut dire que 5 individus occupent les étages 1, 2, 3, 4, 5 dans les deux cas.
Si ces histoires sont embêtantes, imaginons la situation suivante :
On dispose de cinq vaches. On souhaite répartir ces 5 vaches en 7 enclos. Pour cela, on aligne les vaches (en blanc) :



On souhaite ensuite poser des frontières (en noir). Voici une configuration possible :



Finalement, la question est de savoir comment répartir nos 5 vaches et nos 6 séparateurs d'enclos (qui définissent donc nos 7 enclos) sur un tableau de $5 + 7 - 1$ éléments :



On cherche donc comment placer 5 éléments parmi 11 (puisqu'une fois les vaches placées, il n'y a plus le choix pour les enclos) : ce nombre vaut exactement $\boxed{\binom{11}{5}}$.

f)

• X détermine le nombre d'étages visités, c'est donc un compteur. X_i détermine si l'étage i a été visité donc

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^{7} X_i}$$

- $(X_i = 1)$ correspond à « au moins une des cinq personnes a visité l'étage i ». C'est donc le complémentaire de l'évènement « personne n'a visité l'étage i ». La probabilité de ce dernier évènement est, comme en **1.*c)***, $\frac{6^5}{7^5}$ donc $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \frac{6^5}{7^5}$.

Ensuite, il vient $\mathbb{E}(X_i) = 1 - \frac{6^5}{7^5}$ par propriété de l'espérance d'une variable de Bernoulli.
Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{7} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{7} \left(1 - \frac{6^5}{7^5}\right) = 7\left(1 - \frac{6^5}{7^5}\right)$$

$$\underline{\mathbb{E}(X) \approx 3{,}8}$$

2.

a) On raisonne exactement comme à la question précédente en introduisant les variables aléatoires X_{in} de Bernoulli indiquant si l'étage i a été visité.
X_n détermine le nombre d'étages visités, c'est donc un compteur. X_{in} détermine si l'étage i a été visité donc

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} X_{in}$$

$(X_{in} = 1)$ correspond à « au moins une des m personnes a visité l'étage i ». C'est donc le complémentaire de l'évènement « personne n'a visité l'étage i ». La probabilité de ce dernier évènement est, $\frac{(n-1)^m}{n^m}$ donc $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \frac{(n-1)^m}{n^m}$.
Ensuite, il vient $\mathbb{E}(X_{in}) = 1 - \frac{(n-1)^m}{n^m}$ puisque X_{in} suit la loi de Bernoulli.
Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_{in}) = \sum_{i=1}^{7} \left(1 - \frac{(n-1)^m}{n^m}\right) = n\left(1 - \frac{(n-1)^m}{n^m}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right)}$$

b) On suppose $m = n$ donc

$$\mathbb{E}(X) = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

On reconnaît le classique développement faisant intervenir l'exponentielle :

$$\mathbb{E}(X) = n\left(1 - e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right) = n\left(1 - e^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\right) = n\left(1 - e^{-1+o(1)}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = n(1 - e^{-1}) + o(n) \sim n(1 - e^{-1})}$$

3.

a) $(Y_n = k)$ correspond à l'évènement « Le maximum des étages est k. ». Pour connaître la probabilité d'un maximum, on utilise classiquement la disjonction :

$$\mathbb{P}(Y_n \leq k) = \mathbb{P}(Y_n = k) + \mathbb{P}(Y_n \leq k - 1)$$
$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(Y_n \leq k) - \mathbb{P}(Y_n \leq k - 1)$$

Or $(Y_n \leq k)$ correspond à : « Le maximum des étages est inférieur à k » donc à l'évènement « Toutes les personnes sont descendues à un étage compris entre 1 et k » qui a k^m réalisations possibles, ce qui signifie que $\mathbb{P}(Y_n \leq k) = \frac{k^m}{n^m}$. Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{k^m - (k-1)^m}{n^m}}$$

b) La variable aléatoire étant à valeurs dans un univers fini, l'espérance est bien définie et :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{n^m}\sum_{k=1}^{n} k(k^m - (k-1)^m)$$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n^m}\sum_{k=1}^{n}[k^{m+1} - (k-1)^{m+1} - (k-1)^m]$$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n^m}\sum_{k=1}^{n} k^{m+1} - (k-1)^{m+1} - \frac{1}{n^m}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^m$$

A ce stade, on reconnaît dans la première somme un télescopage et dans l'autre on réalise un changement d'indice :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n^m}(n^{m+1} - 0^{m+1}) - \frac{1}{n^m}\sum_{l=0}^{n-1} l^m$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = n - \frac{1}{n^m}\sum_{l=1}^{n-1} l^m}$$

4.

a) La fonction $x \longmapsto x^m$ est continue donc on peut utiliser la définition de l'intégrale sur un segment comme limite de somme de Riemann :

$$\boxed{\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{l}{n}\right)^m \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^m \mathrm{d}x}$$

b) On transforme l'écriture et on utilise la question qui précède :

$$\frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = 1 - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{l}{n}\right)^m \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \int_0^1 x^m \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{m+1}1^{m+1} = \frac{m}{m+1}$$

Par conséquent, on a bien démontré que

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) \sim \frac{nm}{m+1}}$$

5.

a) Ecrivons $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k$ avec $\deg(P) \geq 1$.

$$P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k(X+1)^k - \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k((X+1)^k - X^k)$$

On voit donc par linéarité qu'il suffit d'étudier le degré de $(X+1)^k - X^k$. Or,

$$(X+1)^k - X^k = X^k + \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l - X^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l$$

Donc le degré de $(X+1)^k - X^k$ est $k-1$.
Par conséquent, puisque $a_{\deg(P)} \neq 0$,

$$\deg\big(P(X+1)-P(X)\big) = \deg\big((X+1)^{\deg(P)} - X^{\deg(P)}\big) = \deg(P) - 1$$

$$\boxed{\deg\big(P(X+1)-P(X)\big) = \deg(P) - 1}$$

b) La question sous-entend de démontrer que Δ est un isomorphisme.

▷ Soit $\Delta_{\mathbb{R}_n[X]}: \mathbb{R}_n[X] \longmapsto \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}, P \longmapsto \big(P(X+1)-P(X), P(0)\big)$, l'ensemble image est bien défini d'après la question qui précède.
On vérifie aisément que c'est une application linéaire.
Déterminons son noyau.

$$P \in \ker\big(\Delta_{\mathbb{R}_n[X]}\big) \Leftrightarrow \Delta_{\mathbb{R}_n[X]}(P) = (0,0) \Leftrightarrow P(X+1)-P(X) = 0, P(0) = 0$$

Autrement dit, pour tout entier k, $P(k+1) = P(k) = \cdots = P(0) = 0$ donc P serait un polynôme possédant une infinité de racines (les entiers), ce qui signifie que $P = 0$.
Ainsi, $\ker\big(\Delta_{\mathbb{R}_n[X]}\big) = 0$ donc $\Delta_{\mathbb{R}_n[X]}$ est injective.
Puisque

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = \big((n-1)+1\big)+1 = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) + \dim(\mathbb{R})$$
$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}),$$

Il s'en suit que l'application $\Delta_{\mathbb{R}_n[X]}$ est un isomorphisme.

▷ Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, notons $n = \deg(Q)+1$ considérons l'application $\Delta_{\mathbb{R}_n[X]}$. D'après ce qui précède, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta_{\mathbb{R}_n[X]}(P) = (Q,0)$. On a donc prouvé l'existence d'un polynôme P vérifiant $\Delta(P) = (Q,0)$.
Supposons qu'il existe un second polynôme $\tilde{P} \neq P$ vérifiant $\Delta(\tilde{P}) = (Q,0)$ et notons $p = \max\big(\deg(\tilde{P}), \deg(P)\big)$ son degré. Considérons l'application $\Delta_{\mathbb{R}_p[X]}$, c'est un isomorphisme et on aurait $\Delta_{\mathbb{R}_p[X]}(P) = \Delta_{\mathbb{R}_p[X]}(\tilde{P})$, ce qui contredirait l'injectivité de $\Delta_{\mathbb{R}_p[X]}$.
Contradiction !

$$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}[X], \quad \exists!\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta(P) = (Q,0)}$$

c) On note $Q = X^m$. D'après **5.*a)***,

$$P_m(X+1) - P_m(X) = X^m \Leftrightarrow \deg\big(P_m(X+1)-P_m(X)\big) = m \Leftrightarrow \deg(P_m) - 1 = m$$

$$\boxed{\deg(P_m) = m+1}$$

Pour ce qui est du coefficient dominant, reprenons ce que l'on avait écrit au début de **5.*a)***

$$P_m(X+1) - P_m(X) = a_{m+1}((X+1)^{m+1} - X^{m+1}) + \sum_{k=0}^{m} a_k((X+1)^k - X^k)$$

$$P_m(X+1) - P_m(X) = a_{m+1}\left(\sum_{l=0}^{m} \binom{m+1}{l} X^l\right) + \sum_{k=0}^{m} a_k((X+1)^k - X^k)$$

$$P_m(X+1) - P_m(X) = a_{m+1}\left(\binom{m+1}{m} X^m + \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m+1}{l} X^l\right) + \sum_{k=0}^{m} a_k((X+1)^k - X^k)$$