Chapitre 1

Vocabulaire

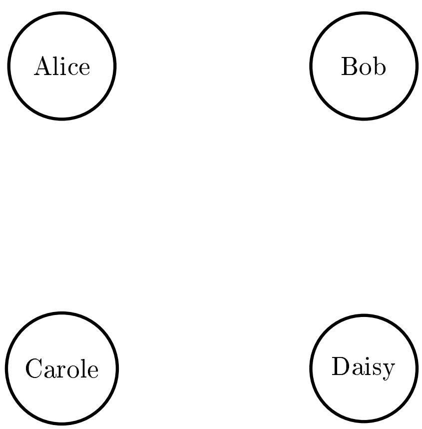
1.1 Définitions

1.1.1 Sommets

La première chose dont on a besoin pour définir un graphe, c'est un ensemble d'objets (ou de personnes) qu'on va appeler ***les sommets du graphe***. Par exemple les positions d'un jeu peuvent être les sommets du graphe de ce jeu ; des villes peuvent être sommets d'un réseau routier les joignant...

Typiquement les sommets d'un graphe seront les endroits où l'on place les pions.

Voici par exemple un graphe montrant les 4 membres d'une équipe :

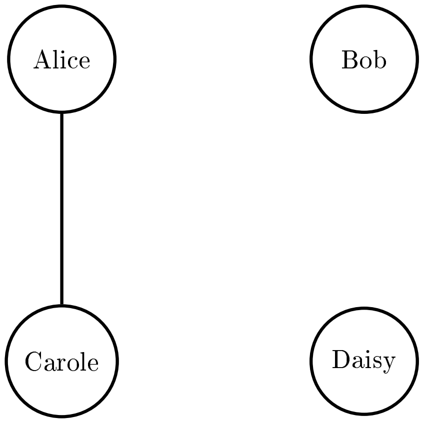


Le seul fait de savoir que l'équipe est formée d'Alice, Bob, Carole et Daisy, ne suffit pas cependant à faire du diagramme ci-dessus, un graphe : il faut aussi dire quels sommets sont en relation avec quels autres sommets. Ce genre d'information permet par exemple de savoir à côté de qui on assied chaque membre de l'équipe lors d'un repas, qui on va faire travailler avec qui dans le travail en équipe, etc.

1.1.2 Graphes

Arêtes

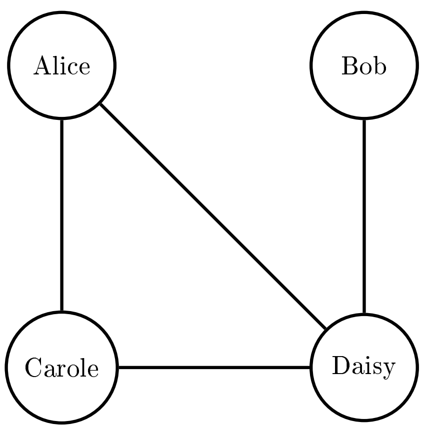
On propose de matérialiser les relations entre membres de l'équipe par des traits joignants les membres qui sont en relation et uniquement ceux-là. On appelle ces traits des ***arêtes*** du graphe. Par exemple, si Alice est amie avec Carole, on trace un trait entre les sommets représentant Alice et Carole :



On dit que deux sommets sont ***adjacents*** s'il y a une arête les joignant. Dans un réseau social, l'adjacence représente la relation d'amitié entre personnes.

Typiquement, les arêtes seront les lignes le long desquelles glissera un pion au cours d'un coup du jeu.

Alice n'est pas très amie avec Bob [1]. Carole non plus. Mais Daisy est amie avec tout le monde, ce qu'on représente ainsi sur le graphe :

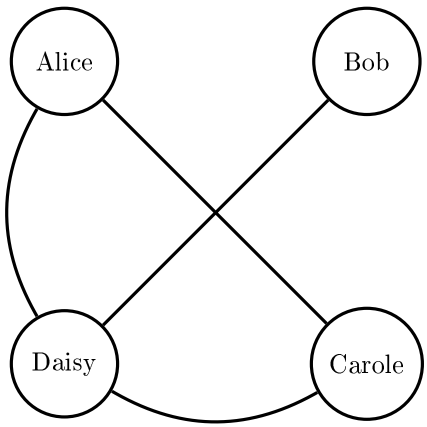


On peut maintenant définir un graphe (non orienté) de la manière suivante :

1. N'importe quel cryptographe vous le dira, Alice et Bob passent leur temps à essayer de trahir chacun les secrets de l'autre. Ce n'est pas la meilleure façon d'entretenir une amitié...

> ***Un graphe est défini par***
> - ***Un ensemble de sommets (en général représentés par des cercles)***
> - ***Un ensemble d'arêtes (en général représentées par des traits), chaque arête joignant deux sommets.***

Les arêtes sont souvent, mais pas toujours, représentées par des segments rectilignes. Et on essaye dans la mesure du possible d'éviter que les arêtes se croisent. Mais c'est juste pour faire joli, la structure d'un graphe dépendant uniquement de l'existence d'arêtes entre certains sommets, et non de la forme des arêtes. Le réseau social précédent peut par exemple être redessiné ainsi :



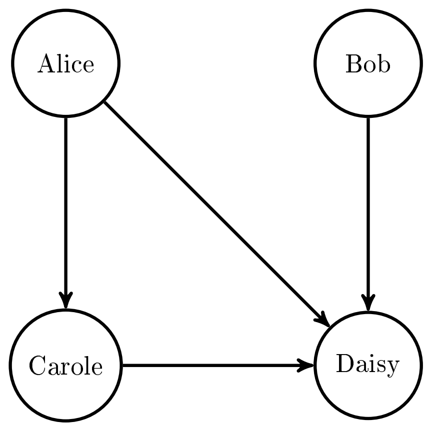
Les graphes sont présents dans les applications des mathématiques, dans chaque situation où des objets (représentés par les sommets) peuvent être reliés entre eux d'une manière ou d'une autre (les liaisons étant représentées par les arêtes du graphe). Par exemple

Modèles	***Sommets***	***Arêtes***
réseau social	personnages	amitié
réseau routier	villes	routes
réseau électrique	prises	câbles
réseau informatique	ordinateurs	câbles réseau
Polyèdres	points	segments
Graphes	cercles	traits

La dernière ligne peut paraître bizarre : étudier les graphes pour les graphes, ça ne fait pas très « mathématiques appliquées ». Mais pour les élèves de Grande Section de maternelle, il n'y a rien d'étrange à appeler ***sommet*** un cercle, et ***arête*** un trait joignant deux cercles. Et les exercices sur les graphes ont un aspect franchement ludique qui transparaîtra tout au long de cet ouvrage, du moins on l'espère.

Arcs

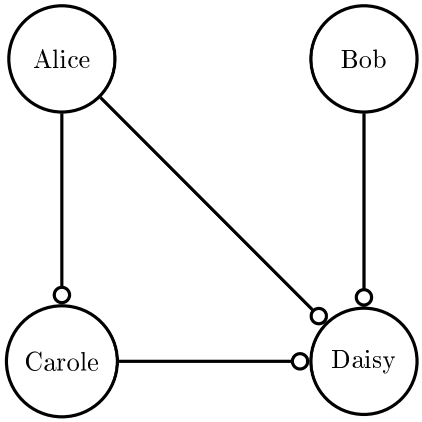
En fait Alice et Bob sont des espions : Alice n'est pas vraiment l'amie de Carole mais elle espionne Carole. Elle espionne aussi Daisy d'ailleurs. Daisy est assez naïve : elle croit être amie avec tout le monde alors qu'en fait elle est espionnée par tout le monde. Ce n'est pas parce que tout le monde connaît tout de Daisy, que celle-ci connaît quoi que ce soit des autres. La relation ***se permet d'espionner*** ne peut donc pas être représentée par des simples traits, mais il faut assortir les traits de flèches pour représenter le sens de la relation (qui est l'espion, qui est espionné). Le graphe obtenu est dit alors ***orienté*** :



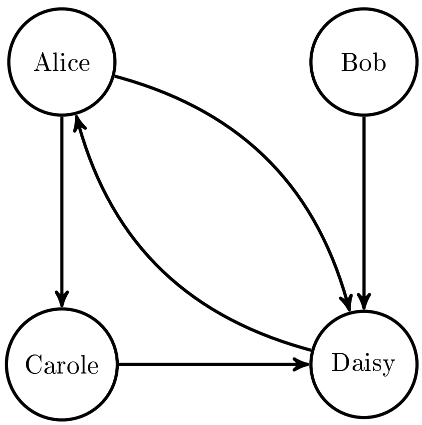
Dans un graphe orienté, les arêtes s'appellent plutôt des ***arcs***. Dans un réseau routier, il semble plus pertinent de parler de ***rue à sens unique***. Mais on se cantonnera au vocabulaire classique avec des arcs ou éventuellement des arêtes orientées.

Typiquement pour jouer sur un graphe orienté, les pions ne peuvent parcourir une arête que dans un sens, celui de la flèche.

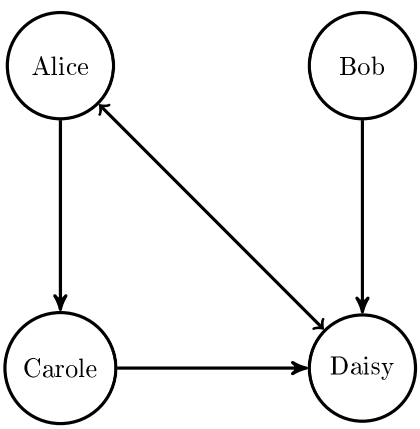
Avant la Grande Section, les arêtes sont peu perceptibles surtout lorsqu'elles sont obliques ou se croisent. Mais dès la Petite Section, on voit relativement peu d'erreurs sur l'orientation de l'arc. C'est pour dessiner les pointes de flèches que les difficultés psychomotrices peuvent apparaître et le graphe orienté peut alors plutôt ressembler à ceci, avec des têtes de flèches franchement arrondies comme ceci :



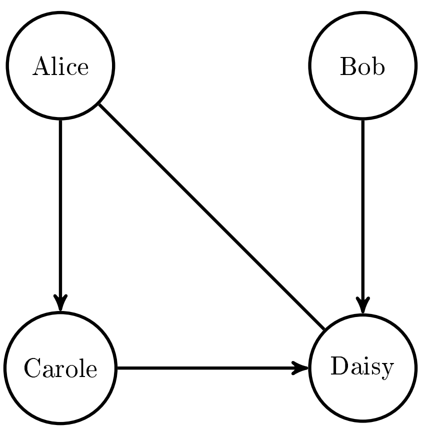
Dans un graphe orienté, il peut arriver que deux arcs soient disposés en sens inverse l'un de l'autre. Par exemple, si Daisy trouve un moyen d'espionner Alice, on peut ou bien rajouter un arc allant de Daisy à Alice



ou bien mettre deux flèches sur l'arc double :



voire ne rien mettre du tout :



Degré d'un sommet

Pour un graphe non orienté, le ***degré*** d'un sommet est le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet (ou qui vont vers ce sommet, c'est pareil avec un graphe non orienté). Dans le réseau social vu au début de ce chapitre, le degré de chaque personne est le nombre d'amis de cette personne : Alice est de degré 2, Bob est de degré 1, Carole est de degré 2 et Daisy est de degré 3.

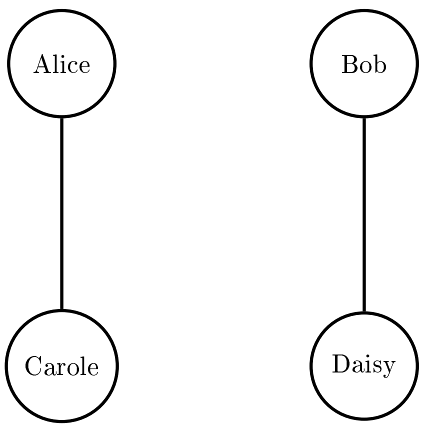
Pour un graphe orienté, chaque sommet a deux degrés :

- le ***degré entrant*** qui est le nombre d'arcs allant vers le sommet ;
- le ***degré sortant*** qui est le nombre d'arcs allant du sommet vers un autre sommet.

La notion de degré d'un sommet est accessible dès le CP puisque calculer un degré revient à compter des arêtes.

1.1.3 Connexité

Après une dispute entre les membres de l'équipe, Alice et Carole ont décidé de faire bande à part :



Sur ce graphe, on n'a plus l'impression de voir un réseau social, mais deux, indépendants l'un de l'autre : aucun des membres du couple (Alice, Carole) n'est plus en relation avec aucun des membres du couple (Bob, Daisy). On peut voir cette situation de deux manières :

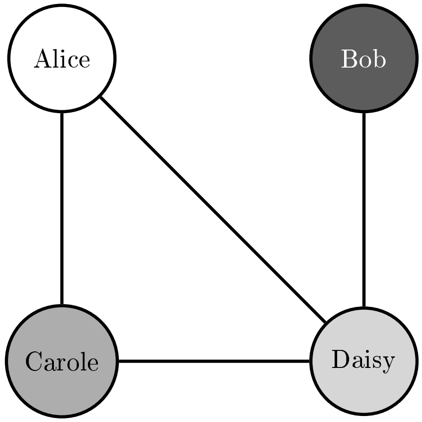
- deux graphes (à deux sommets et une arête chacun) tracés côte à côte ;
- ou un seul graphe mais en deux morceaux.

Dans ce dernier cas on dit que le graphe n'est pas ***connexe***.

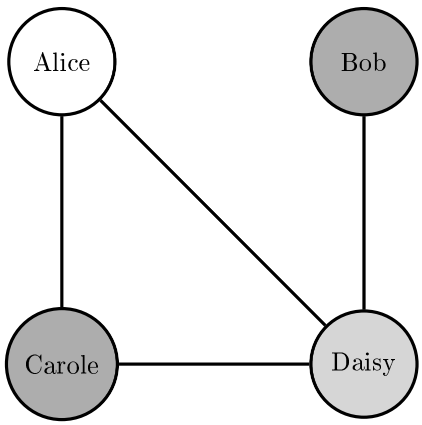
Comme, d'expérience, les enfants considèrent qu'il est naturel de dessiner des graphes connexes, on ne considèrera dans cet ouvrage, que des graphes connexes, sauf dans le dernier chapitre.

1.1.4 Coloration

Colorier un graphe, c'est colorier chacun de ses sommets. On essaye autant que possible de ne jamais colorier de la même façon deux sommets adjacents :



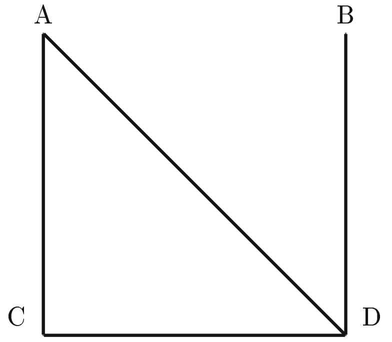
Remarque : on peut colorier tout aussi proprement le graphe ci-dessus avec moins de couleurs :



Par contre on ne peut pas descendre en-dessous de 3 couleurs : on dit que le ***nombre chromatique*** de ce graphe est égal à 3. Cette notion est accessible dès la Grande Section, comme on le verra dans le prochain chapitre.

1.2 Polyèdres

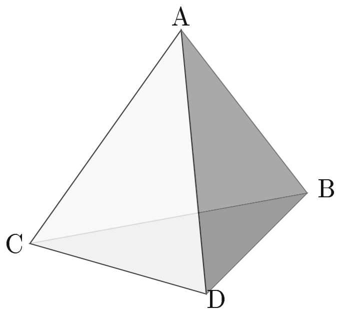
On peut se demander pourquoi ont été choisis des noms aussi saugrenus que ***sommet*** et ***arête*** pour désigner les constituants d'un graphe. En fait cela a une raison historique : vers la fin du XIX^e siècle, Julius Petersen fut l'un des premiers à dessiner des graphes, et il représentait les sommets par des points (ou des cercles de rayon nul) et les arêtes par des segments (tout droits). Si Petersen avait connu Alice et son équipe, il aurait dessiné quelque chose comme



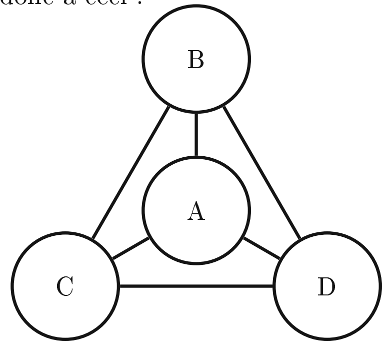
Si on ne s'astreint plus à ce que tous les sommets soient sur la feuille, on obtient une représentation tridimensionnelle du graphe, qui s'apparente à un polyèdre. Casimir Kuratowski (en 1930) appelait ***courbe gauche*** ce qu'aujourd'hui on appelle graphe, et dessinait sous forme de polyèdre les graphes les plus remarquables qu'il connaissait. En voici quelques exemples :

1.2.1 Tétraèdre

On peut former un graphe avec les 4 sommets A, B, C et D d'un tétraèdre :



Deux sommets sont adjacents s'il y a une arête du tétraèdre les joignant. Or dans un tétraèdre, chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête. Le graphe du tétraèdre ressemble donc à ceci :



En hommage à Kuratowski, le graphe du tétraèdre est noté K_4 et appelé ***graphe complet à 4 sommets***. Le mot « complet » désigne un graphe dont deux sommets quelconques sont adjacents.