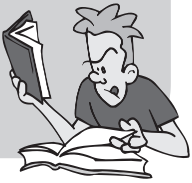
1 COMMENT CALCULER LES PROBABILITÉS ET L'ÉQUIPROBABILITÉ ?



Les probabilités sont des nombres entre 0 et 1. D'autre part, pour une expérience donnée, la somme des probabilités de toutes les issues possibles vaut 1. L'hypothèse d'équiprobabilité signifie que les probabilités de toutes les issues possibles sont égales.

Exemple

On considère un dé pipé à 6 faces de manière à ce que la face 6 ressort quatre fois plus que toutes les autres faces et les cinq autres faces sortent de manière équiprobable. On note p_i la probabilité de la face i. Alors les hypothèses se traduisent par $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$ et $p_6 = 4p_1$.

Or $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ donc $p_1 + p_1 + p_1 + p_1 + p_1 + 4p_1 = 1$

$9p_1 = 1$, ainsi $p_1 = \dfrac{1}{9}$ et $p_6 = \dfrac{4}{9}$.

◗ **Propriété**

Soit A et B deux événements alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exemple

Parmi 242 élèves, 24 suivent l'enseignement d'arts plastiques, 31 l'option musique et 9 suivent les deux options. Quelle est la probabilité qu'un élève suive l'une au moins des deux options ?

On a $p(A) = \dfrac{24}{242}$, $p(B) = \dfrac{31}{242}$ et $p(A \cup B) = \dfrac{9}{242}$.

D'où $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{46}{242}$.

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 1.1 (4 points) 10 min

On considère un dé équilibré à 6 faces.

1. Soit A : « le résultat est un chiffre pair ». Déterminer $p(A)$.
2. Soit B : « le résultat est un chiffre supérieur ou égal à 5 ». Déterminer $p(B)$.
3. Soit C : « le résultat est un chiffre supérieur à 3 ». Déterminer $p(C)$.
4. **a.** Exprimer avec une phrase $A \cap B$. Calculer $p(A \cap B)$.
   b. Exprimer avec une phrase $A \cup B$. Calculer $p(A \cup B)$ de deux manières différentes.

Exercice 1.2 (4 points) 10 min

On considère deux dés équilibrés l'un à 6 faces et l'autre à 4 faces qu'on lance simultanément et dont on additionne les résultats.

1. Quel est l'ensemble des issues possibles ?
2. Compléter le tableau des résultats suivant :

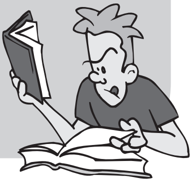
+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						

3. Soit A : « le résultat est un nombre pair ». Calculer $p(A)$.
4. Soit B : « le résultat est un nombre supérieur à 7 ». Calculer $p(B)$.

Exercice 1.3 (4 points) 15 min

1. On considère un dé à 8 faces de sorte que les faces de chiffres pairs sortent deux fois plus que les faces de chiffres impairs (en considérant que deux faces de même parité ont la même probabilité). Quelle est la probabilité de sortie de chaque face ?
2. On considère un dé à 4 faces de sorte que la probabilité de sortie de la face soit proportionnelle au chiffre porté par cette face avec le même coefficient de proportionnalité pour toutes les faces. Quelle est la probabilité d'apparition de chaque face ?

2 QU'EST-CE QU'UNE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ?



Définition

Soit A et B deux évènements tels que $p(A) \neq 0$. La probabilité de réalisation de B sachant que A est réalisé est définie par $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.
En particulier, $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$.

Ainsi le théorème des probabilités totales appliqué à un événement et son complémentaire peuvent se réécrire :

Théorème

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$$

Exemple

Considérons le tableau ci-dessous visant à mettre en évidence le lien entre le tabagisme des femmes pendant la grossesse et le faible poids à la naissance appelée hypotrophie.

		Tabagisme maternel		Total
		non	oui	
Hypotrophie	non	480	320	800
	oui	20	180	200
	Total	500	500	1 000

Soit T : « la mère fume pendant sa grossesse » et H : « l'enfant est hypotrophe ».

Alors $p_T(H) = \dfrac{320}{500} = \dfrac{16}{25}$.

TOP CHRONO

C'est l'interro !

Exercice 2.1 (4 points) 10 min

Dans une région, on a relevé sur la dernière année :
15 % des individus ne sont pas allés manger dans un fast-food.
10 % des individus sont allés moins de 10 fois dans un fast-food et parmi eux 60 % ont pris un menu sans frites.
75 % des individus sont allés plus de 10 fois dans un fast-food et parmi eux 10 % ont pris un menu sans frites.
On interroge au hasard un individu de cette région. Quelle est la probabilité qu'il ait mangé un repas sans frite dans un fast-food l'année écoulée ?

Exercice 2.2 (4 points) 10 min

Deux sacs contiennent des pommes jaunes et rouges. Le premier sac contient quatre pommes jaunes et trois pommes rouges. Le second sac contient deux pommes jaunes et sept pommes rouges. On choisit au hasard un sac puis on tire une pomme au hasard dans le sac choisi. On considère les événements suivants :
S_1 : « le sac choisi est le sac 1 » ; S_2 : « le sac choisi est le sac 2 »
J : « la pomme choisie est jaune »

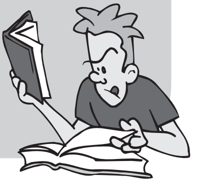
1. Déterminer la probabilité de tirer une pomme jaune si le sac 1 a été choisi.
2. Déterminer la probabilité de tirer une pomme jaune si le sac 2 a été choisi.
3. Déterminer la probabilité de tirer une pomme jaune.

Exercice 2.3 (4 points) 15 min

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. En 2000, le laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas, si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas. ». On note M : « l'animal est malade » et T : « le test est positif ».

1. Déterminer :
   a. $p(M)$ **b.** $p_M(T)$ **c.** $p_{\bar{M}}(T)$
2. En déduire $p(T)$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable si sa valeur prédictive positive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif est supérieur à 0,999. Ce test est-il fiable ?

3 COMMENT UTILISER UN TABLEAU À DOUBLE ENTRÉE ?



Un tableau à double entrée peut contenir soit des effectifs soit des probabilités.

Nous allons ici considérer le cas d'un tableau à double entrée de probabilités. Alors tous les nombres sont compris entre 0 et 1. S'ils sont exprimés en pourcentage, ce qui est souvent le cas, ils sont donc entre 0 et 100.

- La case intersection des deux colonnes « Total » (en gris très foncé sur l'exemple) contient nécessairement la valeur 1 (ou 100 si exprimée en pourcentage).
- Les autres cases de la ligne « Total » et de la colonne « Total » (en gris clair sur l'exemple) contiennent les probabilités dites marginales.
- Les cases « intérieures » (en blanc sur l'exemple) contiennent exclusivement des probabilités dites conjoints correspondants à des intersections d'événements.
- La somme des éléments dans une ligne est égale à l'élément contenu dans la dernière case de cette ligne correspondant au « Total ». Par exemple $480+320=800$.
- La somme des éléments dans une colonne est égale à l'élément contenu dans la dernière case de cette ligne correspondant au « Total ». Par exemple $320+180=500$ ou $800+200=1000$.

Ainsi pour déterminer une probabilité conditionnelle à l'aide d'un tableau à double entrée, il faut utiliser la définition et les valeurs d'une probabilité conjointe et d'une probabilité marginale.

Exemple

		Tabagisme maternel		Total
		non	oui	
Hypotrophie	non	480	320	800
	oui	20	180	200
	Total	500	500	1 000

TOP CHRONO

C'est l'interro !

Exercice 3.1 (5 points) 10 min

Un commerce alimentaire propose 350 produits en provenance de France ou d'Europe selon la répartition suivante :

	Fruits et légumes	**Condiments**	**Conserves**	**Total**
France	23		64	129
Europe		63		
Total	35		210	

1. Compléter le tableau.

2. On choisit au hasard un produit dans le magasin.

a. Déterminer la probabilité pour que ce produit ne soit pas un fruit ou légume.

b. Déterminer la probabilité pour que ce produit soit fabriqué en France sachant que c'est une conserve.

c. Déterminer la probabilité que ce produit soit un condiment sachant qu'il n'a pas été produit en France.

Exercice 3.2 (4 points) 10 min

Soit A et B deux événements tels que $p(A)=0{,}49$, $p(B)=0{,}56$ et $p(A\cap B)=0{,}35$.

1. Placer dans le tableau suivant les probabilités de l'énoncé.

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\bar{A}}$	**Total**
$\boldsymbol{B}$			
$\boldsymbol{\bar{B}}$			
Total			1

2. Compléter le tableau.

3. Calculer $p_A(B)$ et $p_B(A)$.

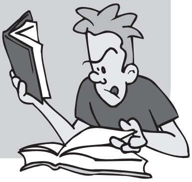
Exercice 3.3 (4 points) 10 min

Un laboratoire pharmaceutique développe un test permettant de dépister une maladie rare infectant 3 % de la population. Ce test est positif pour 2 % de la population mais la probabilité d'être malade et d'obtenir un test positif est de 0,019. La sensibilité du test correspondant à la probabilité que le test soit positif sachant qu'on est malade. La valeur prédictive positive correspond à la probabilité que la personne soit malade sachant que son test et positif.

1. Quelle est la sensibilité de ce test ?

2. Quelle est la valeur prédictive positive de ce test ?

4 COMMENT UTILISER UN ARBRE PONDÉRÉ ?

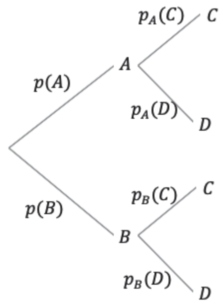


Un arbre pondéré se construit en utilisant une règle essentielle : la somme des probabilités des branches partant d'un même nœud vaut 1.

Les probabilités présentes sur des branches de profondeur 2 correspondent à des probabilités conditionnelles.

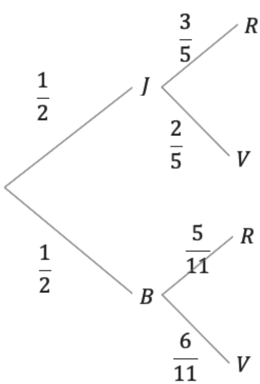
On retrouve alors que la probabilité d'un chemin correspond à la multiplication des probabilités des branches le formant car cette probabilité correspond à l'intersection de deux événements.

$$p(A \cap D) = p(A)p_A(D)$$



Exemple

On dispose d'un sac jaune contenant 3 boules rouges et 2 boules vertes et d'un sac bleu contenant 5 boules rouges et 6 boules vertes. On lance un dé équilibré. Si le résultat est supérieur à 4, on choisit le sac jaune et on tire une boule au hasard. Soit J : « choisir le sac jaune » et R : « tirer une boule rouge ». Alors l'arbre représentant la situation est :



On a $p(J) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Ainsi $J \cap R$ correspond au chemin en gras donc :

$p(J \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$.

Il y a deux manières d'obtenir une boule rouge en choisissant le sac jaune ou en choisissant le sac vert ainsi $p(R) = p(J \cap R) + p(\overline{J} \cap R) = \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{11} = \frac{58}{110}$.

TOP CHRONO
C’est l’interro !

Exercice 4.1 (4 points) 20 min

Une urne contient 4 boules vertes et 5 boules rouges.

Partie A

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l’urne.

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation.

2. Quelle est la probabilité d’obtenir deux boules rouges ?

Partie B

On tire au hasard, successivement et avec remise deux boules de l’urne.

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation.

2. Quelle est la probabilité d’obtenir deux boules rouges ?

Exercice 4.2 (4 points) 20 min

Dans un collège, il y a 60 % de filles. Parmi les filles, seules 30 % choisissent l’option endurance contre 70 % des garçons. On considère les événements :

F : « être une fille » et *E* : « choisir l’endurance ».

1. Construire un arbre pondéré représentant les données de l’énoncé.

2. On considère un élève au hasard.

a. Quelle est la probabilité que ce soit une fille qui pratique l’endurance ?

b. Quelle est la probabilité que cet élève pratique l’endurance ?