

Chapitre I

LES MILIEUX CONTINUS

1. LE MODELE DE FLUIDE

Les fluides qui font l'objet de cet ouvrage seront à la fois gazeux ou liquides. La distinction entre les deux est normalement identifiée comme la capacité des premiers à modifier leur volume en occupant toujours tout l'espace à disposition, tandis que les liquides maintiennent leur volume constant avec une très bonne approximation et sans référence à l'environnement où ils se trouvent.

Même s'il y'a dans la réalité des situations intermédiaires très importantes, celles-ci sont en général constitués par le mélange de deux états (vapeurs humides, brouillards, etc...). Mais, sous réserve d'une attention particulière aux situations dans lesquelles un fluide est en train de passer d'un état à un autre (*transitions de phase*), on peut étudier ces mélanges en référence aux deux états séparés et assembler ensuite les résultats (modèle du *fluide biphasé*).

Au-delà de leurs différences, toutefois, liquides et gaz ont des caractéristiques très communes par rapport à l'autre état d'agrégation de la matière, celui des solides. En fait l'expérience montre qu'un fluide :

- Ne s'adapte pas à n'importe quelle forme statique sans développer des tensions internes ;
- En conséquence il n'oppose pas de résistance aux déformations, mais au mouvement ;
- Il continue à s'écouler pendant tout le temps où les actions dynamiques (forces, pressions) font leur effet.

En revanche, un solide :

- N'accepte pas des variations dans sa forme sans développer des tensions internes ;
- En conséquence il oppose de la résistance aux déformations, ainsi qu'au mouvement ;
- Une fois l'équilibre statique atteint, la déformation s'arrête même si l'action dynamique est encore en cours.

Une capacité commune aux solides et aux liquides est celle de conduire la chaleur, même si elle est souvent nettement supérieure dans ces derniers compte tenu de leurs mouvements internes.

Dans la réalité, il existe aussi des cas où la limite entre certains fluides spéciaux (comme les *fluides non newtoniens*) et des solides amorphes est assez floue. On peut se demander, par exemple, comment classer certaines sortes de colles ou de gommages. Dans cet ouvrage, toutefois, on s'intéressera à des fluides bien caractérisés, choix qui, pour ne pas être générique, exige la définition d'un *modèle de fluide*. Le modèle de fluide

adopté dans cet ouvrage est donc défini par les trois propriétés décrites ci-dessus qui, comme il sera explicité ultérieurement, sont étroitement liées aux suivantes :

- Un fluide est capable de transmettre des *pressions* d'un point à l'autre de son volume,
- De même, il peut y développer des *contraintes*,
- Il est un *conducteur thermique*
- Dans des conditions appropriées il peut changer sa masse volumique, c'est-à-dire qu'il peut devenir *compressible*.

En outre on ne considérera pas ici le cas d'un gaz extrêmement raréfié, dans lequel la distance moyenne entre les molécules l (qu'on appelle *libre parcours moléculaire moyen*, c'est-à-dire la distance qu'une molécule doit parcourir avant d'entrer en collision avec une autre) est d'un ordre de grandeur L proche de l'échelle caractéristique du phénomène en étude. Dans les fluides étudiés ici, L est supérieur à l de beaucoup d'ordres de grandeur, ce qu'on peut exprimer à travers la condition :

$$\text{Kn} = \frac{l}{L} \ll 1$$

où Kn est le *nombre de Knudsen*. Les gaz les plus courants, comme l'air, ont typiquement des valeurs $l \cong 10^{-7}$ m dans les conditions ambiantes¹. Donc, pour un phénomène qui se déroule sur une échelle caractéristique de 1 m on obtient $\text{Kn} \cong 10^{-7}$.

2. DÉFINITION DE FLUIDE ET HYPOTHÈSE DU MILIEU CONTINU

Dans les liquides les distances moyennes entre les molécules sont encore plus petites. En général tous les fluides considérés ici contiennent un très grand nombre de molécules, ce qui empêche toute étude fondée sur le calcul de l'évolution individuelle de chacune d'elles. On introduit alors la notion de *particule fluide*, c'est-à-dire d'un volume élémentaire de fluide ayant des dimensions :

- Assez grandes pour renfermer un nombre de molécules suffisant pour qu'il soit raisonnable de définir des quantités statistiques moyennes (pression, température, etc...)
- Assez petites pour accepter que ces propriétés moyennes soient constantes dans son volume (ou avec des variations négligeables par rapport à celles intervenant à l'échelle macroscopique L du phénomène étudié).

Les différences entre les valeurs de la pression, de la température, etc. sont détectables seulement d'une particule à l'autre mais pas au sein de chacune d'elles. La dimension des particules fluides détermine alors l'*échelle différentielle* dx

Dans ces conditions, le fluide apparait comme un *continuum* dont on peut décrire les évolutions à travers les valeurs de ses grandeurs physiques (vitesse, pression, température, etc.) dans des points fixés dans l'espace. Il s'agit d'une vision empruntée de la théorie physique des champs et, en fait, on parle de *champ* de vitesse, de pression, de température, etc. Désignant par α une de ces grandeurs², elle est définie comme une fonction de sa position x et du temps t :

$$\alpha = \alpha(x, t) \tag{I.1}$$

¹ Selon la convention normalement adoptée, les conditions ambiantes sont définies comme étant la température de 288 K et la pression de 1 bar (107 Pa)

² La grandeur α peut être aussi bien scalaire (comme la température T) que vectorielle (comme la vitesse U)

En d'autres termes $\alpha(x, t)$, est la valeur prise par α pendant le passage de la particule fluide par le point x dans l'instant t . Cette description, basée sur la notion d'un champ est appelée *point de vue Eulérien* pour l'étude des écoulements fluides : on reviendra sur ce point ultérieurement, au début du C, quand on étudiera plus en détails la mécanique des fluides. Il suffit maintenant de rappeler que si :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \tag{I.2}$$

le champ est alors appelé *permanent* ou *stationnaire*. Si, par ailleurs :

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \tag{I.3}$$

le champ est alors appelé *uniforme*.

3. PROPRIETES DE TRANSPORT MOLECULAIRE DANS LES FLUIDES REELS.

L'expérience montre que les vitesses des particules fluides en mouvement sur des trajectoires adjacentes ne présentent jamais des discontinuités. En revanche, si un écoulement a été généré avec une frontière interne au travers de laquelle les vitesses sont différentes, celles-ci se raccordent progressivement jusqu'à ce que se développe un profil de vitesse continu comme il apparaît sur la figure I.1

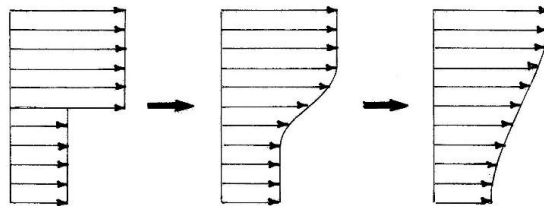


Figure I.1 : Evolution d'un écoulement présentant un échelon initial de vitesse

Le phénomène est similaire avec deux fluides à températures différentes qui se trouvent l'un à côté de l'autre : la température de l'un diffuse dans l'autre et fait ainsi disparaître la discontinuité qui se répartit alors sur un espace de plus en plus large.

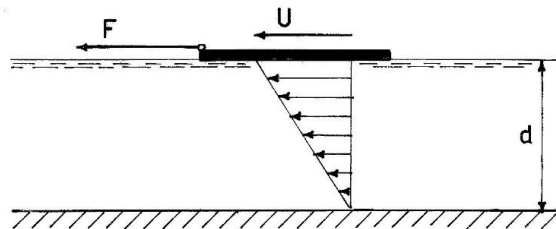


Figure I.2 : Expérience de Newton

Dans le domaine de la mécanique des fluides ce phénomène fut étudié par Newton au moyen d'une expérience célèbre où un radeau de surface S flottant au niveau de l'eau dans un chenal de profondeur d était trainé avec une vitesse constante U , comme il est représenté sur la figure I.2 où l'on voit que les couches fluides supérieures, entraînées par le radeau, ont une vitesse supérieure à celle des couches inférieures qui, elles, sont freinées par le fond du chenal. Newton répétant l'expérience avec des fluides, des dimensions et des géométries différentes, et mesurant à chaque expérience la force F nécessaire pour maintenir constant le mouvement du radeau, déduisit la loi :

$$F = \mu S \frac{U}{d} \quad (I.4)$$

où μ est un coefficient qui dépend exclusivement de la nature et de l'état physique du fluide et s'appelle *viscosité dynamique*. Ses unités de mesure sont le *poise* (P) dans le système CGS, et le *Pascal-seconde* (Pa · s, souvent écrit Pas), dans le système SI :

$$1 \text{ Pas} = 1 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$$

Bien qu'en unités CGS, le poise est encore très utilisé pour les liquides, surtout par son sous-multiple *centipoise* (cP). Le tableau I.1 montre que 1 cP est la viscosité dynamique de l'eau à 20 °C. En revanche, l'unité SI est d'usage plus commun avec les fluides gazeux. La relation entre Pas et P est :

$$1 \text{ Pas} = 10 \text{ P}$$

Fluide	SI [Pas]	CGS [cP]
Eau	10^{-3}	1
Air	1.8×10^{-5}	1.8×10^{-2}

Tableau I.1 - Viscosités dynamiques de l'eau et de l'air à 20 °C

Il est clair que le mécanisme physique illustré sur les figures I.1 et I.2 est le même. Il se manifeste à travers la propriété qu'a la viscosité dynamique de représenter le frottement interne d'un fluide, c'est-à-dire sa plus ou moins grande propension à atténuer les écarts des vitesses dans le champ de mouvement.

Le phénomène correspondant dans le domaine thermique a été étudié par Fourier. Si on maintient un saut constant de température ΔT entre les deux faces d'une paroi de surface S et épaisseur d , le débit thermique \dot{Q} (flux de chaleur, ou énergie thermique par unité de temps) est donné par la formule :

$$\dot{Q} = -\lambda S \frac{\Delta T}{d} \quad (I.5)$$

(le signe négatif signifie que la chaleur se dirige de la paroi chaude vers la froide, donc $\dot{Q} > 0$ si $\Delta T < 0$). De la même façon que μ dans la relation (I.4) le coefficient λ ne dépend que de la nature et de l'état physique de la substance et s'appelle *conductivité*

thermique. Dès lors qu'on exprime \dot{Q} en calories [cal] par seconde ou joule¹ [J] par seconde, les unités de mesure de λ sont $\text{cal}/(\text{K} \cdot \text{m} \cdot \text{s})$ ou $\text{W}/(\text{K} \cdot \text{m})$. Bien que ces notions aient été présentées dans le cas d'une paroi solide, elles demeurent valides si la paroi est remplacée par une couche de fluide d'épaisseur d au repos : dans les deux cas la conductivité thermique permet à un flux de chaleur de s'écouler de la région chaude vers la région froide et se manifeste comme le facteur qui atténue les écarts de température au sein du fluide. Il est évident que le rôle joué par la viscosité dynamique est le même, s'agissant des vitesses.

L'origine des phénomènes décrits ci-dessus doit être recherchée au niveau des échelles moléculaires. Concernant la viscosité, la situation est différente pour les liquides et les gaz. Elle est plus compliquée dans le cas des liquides car, selon les situations, l'énergie de liaison, les chaleurs latentes de condensation ou d'évaporation doivent être prises en compte. Dans le cas de certains polymères à chaîne longue, la situation est beaucoup plus complexe. C'est le cas de quelques huiles lubrifiantes, où la longueur de la molécule joue aussi un rôle important. Tous ces effets font en sorte que la viscosité des liquides diminue si la température augmente, ce qui est bien représenté par la relation :

$$\mu = A e^{-T/B} \quad (1.6)$$

où A et B sont des constantes caractéristiques du liquide.

En revanche, concernant la conductivité thermique, son origine provient de l'agitation thermique des molécules au cours de laquelle les molécules plus rapides d'une région chaude transfèrent (par échanges de position où – avec plus d'efficacité – à travers des collisions) leur énergie cinétique aux molécules plus lentes de la région froide adjacente. Dès lors que la température est la mesure statistique de l'énergie cinétique moyenne dans le mouvement d'agitation moléculaire, ces échanges aboutissent à une uniformisation finale.

La situation est plus simple pour les gaz, où l'agitation moléculaire n'explique pas seulement la conductivité thermique mais aussi la viscosité. L'agitation thermique est en fait telle que les molécules d'une couche de fluide, en échangeant leur positions avec celles d'une autre couche où en entrant en collision avec elles, emportent ou transfèrent leurs propriétés physiques, qui sont selon le cas l'énergie cinétique ou la quantité de mouvement. Ce processus se déroule à l'échelle microscopique, extrêmement plus petite que l'échelle dx des variations des propriétés moyennes du fluide. Il est donc raisonnable de considérer la moyenne, au sein de dx , des effets de ces transferts microscopiques. Le résultat de cette moyenne n'est pas nul, puisque :

- entre deux filets de fluide de vitesses différentes, un flux de quantité de mouvement prend naissance, ce qui tend à uniformiser les vitesses ;
- entre deux filets de fluide à températures différentes un flux de chaleur (donc de l'énergie cinétique due à l'agitation moléculaire) s'établit, ce qui tend à uniformiser les températures.

Quoi qu'il en soit, autant dans les liquides que dans les gaz, l'origine de ces phénomènes provient de processus qui se déroulent à l'échelle moléculaire, donc des caractéristiques typiques du fluide et de son état thermodynamique (décrit par sa température). Par conséquent on peut décrire les flux moyens par des coefficients qui ne dépendent pas du mouvement macroscopique du fluide. Ce processus s'appelle *diffusion ou transfert*

¹ On rappelle ici que $1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$. Dans cet ouvrage on privilégiera l'usage des unités SI avec les seules exceptions des cas où les unités traditionnelles conduisent à des valeurs numériques particulièrement faciles à retenir.

moléculaire et se traduit par des lois physiques qui expriment la proportionnalité du flux d'une grandeur avec son gradient multiplié par un coefficient de transfert. Ces lois sont :

- La loi de Newton pour la diffusion de la quantité de mouvement :

$$\tau = \mu \frac{dU}{dz} \quad (1.7)$$

où τ est la *contrainte de cisaillement* entre deux couches fluides séparées l'une de l'autre par une distance dz au travers de laquelle la différence des vitesses est dU . Il est évident que la relation (1.7) n'est autre que la relation (1.4) où F/S a été remplacé par τ et U/d par dU/dz . En d'autres termes, on suppose maintenant que la diffusion de la quantité de mouvement a lieu entre deux couches de fluides infiniment voisines avec des vitesses infiniment proches. En conséquence les dimensions physiques de τ sont $[N/m^2]$.

En désignant par ρ $[kg/m^3]$ la masse volumique du fluide¹ on introduit la grandeur ν :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.8)$$

dénommée *viscosité cinématique* car ses dimensions physiques sont $[m^2/s]$. Elle ne fait donc intervenir que des grandeurs fondamentales cinématiques, contrairement à μ où l'unité de force intervient également. La viscosité cinématique permet une interprétation importante de la relation (1.7). En effet, si on suppose que la masse volumique ρ du fluide reste suffisamment constante, la relation (1.4) peut être réécrite sous la forme :

$$\tau = \nu \frac{d(\rho U)}{dz} \quad (1.9)$$

où le produit ρU représente la quantité de mouvement du fluide par unité de volume². Cette relation apporte un éclairage sur ce qui a été exposé ci-dessus : la viscosité régit le processus de diffusion de la quantité de mouvement et la viscosité cinématique en est le coefficient représentatif dans la loi de gradient qui le décrit. On pourrait même, de façon similaire, expliciter la contrainte de cisaillement, si ce n'était la présence du signe négatif : $-\tau$. Cette grandeur représente le flux dans la direction z , par unité de surface et de temps, de la quantité de mouvement par unité de volume ρU proportionnel à l'opposé du gradient de cette même grandeur dans le sens de z . C'est pour cette raison que, parfois, ν est aussi appelé *diffusivité visqueuse*. L'autre intérêt de ν est qu'on la retrouve dans de nombreuses formules théoriques où μ apparaît toujours divisé par ρ . En revanche, dans les gaz, la présence de ρ dans ν rend cette grandeur dépendante de la pression, ce qui n'est pas le cas pour μ . Pour cette raison, la viscosité dynamique μ est encore très utilisée dans la pratique. Contrairement aux liquides, où μ diminue lorsque la température croît, elle augmente dans le cas des gaz. Ceci n'est pas surprenant puisque dans les gaz l'origine de la

¹ A ne pas confondre avec le poids spécifique, à savoir le poids de l'unité de volume, qui est $g\rho$ $[N/m^3]$ où g est l'accélération de gravité égale à $9,81 m/s^2$

² U ne représente alors pas seulement la vitesse, mais aussi la quantité de mouvement par unité de masse

viscosité est due à l'agitation moléculaire qui croît avec la température. La relation entre μ et T est donnée par la *relation de Sutherland* :

$$\mu = S \frac{T^{3/2}}{T + \chi} \quad (I.10)$$

où S et χ sont des constantes dont les valeurs pour l'air sont respectivement $1,46 \times 10^{-6}$ Pas/ $K^{1/2}$ et 110 K. Pour l'air, on a $\mu = 1,79 \times 10^{-5}$ Pas

L'unité de mesure CGS de la viscosité cinématique est le *stokes* (St) :

$$1 \text{ St} = 1 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

tandis que l'unité SI correspondante à $1 \text{ m}^2/\text{s}$ n'a pas de nom. Comme la viscosité dynamique μ prend, pour l'eau à 20°C , la valeur simple de 1 cP dans le système CGS, ν prend, à la même température et à la pression de 1 bar une valeur également simple de 1 cSt (1 centistokes).

Fluide	SI [m ² /s]	CGS [cSt]
Eau	10^{-6}	1
Air	$14,6 \times 10^{-6}$	14,6

Tableau I.2 - Viscosités cinématiques de l'eau et de l'air à 20°C et 1 bar

Les valeurs de ν pour l'eau et l'air dans les conditions ambiantes dans les systèmes CGS et SI sont données dans le tableau I.2. On peut calculer ces valeurs à partir de celles du tableau I.1 en considérant que dans les conditions ambiantes les masses volumiques de l'eau et de l'air sont respectivement $1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ et $1,225 \text{ kg}/\text{m}^3$.

- La loi de Fourier pour la diffusion de la chaleur :

$$\dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dz} \quad (I.11)$$

où \dot{q} [cal/(m²·s)] ou [W/m²] est la densité de flux thermique (chaleur transférée par unité de surface et de temps) dans la direction z , proportionnel à travers λ à l'opposé du gradient de température dans le sens de z . Comme avec la loi de Newton, la relation (I.11) n'est qu'une réécriture de la relation (I.5) avec \dot{Q}/S remplacé par \dot{q} et $\Delta T/d$ par dT/dz : la diffusion de la chaleur est donc maintenant supposée avoir lieu entre deux couches de fluides infiniment voisines avec des températures infiniment proches.

De façon similaire, dans ce cas, le coefficient de la relation (I.11) peut être remplacé par un autre ayant des dimensions exclusivement cinématiques. En désignant avec c_s la chaleur spécifique pour unité de masse du fluide [kcal/(kg·K)] ou [J/(kg·K)] la quantité κ :

$$\kappa = \frac{\lambda}{c_s \rho} \quad (I.12)$$

a les mêmes dimensions physiques que la viscosité cinématique, c'est-à-dire $[m^2/s]$. Elle s'appelle *diffusivité thermique* et, comme ν , permet la réécriture de la relation (I.11) dans une forme qui met en évidence la proportionnalité entre le flux d'une grandeur physique (l'énergie thermique) et son propre gradient. En admettant, pour simplifier, que ρ et c_s sont constants la relation (I.11) peut alors être reformulée :

$$\dot{q} = -\kappa \frac{d(c_s \rho T)}{dz} \quad (I.13)$$

Eu égard à la définition de c_s le produit $c_s \rho T$ décrit l'énergie thermique par l'unité de volume du fluide à la température T , produisant une densité de flux \dot{q} .

Si dans un liquide c_s reste relativement inchangé, il dépend de la transformation à travers laquelle l'énergie a été échangée dans le cas d'un gaz et il doit donc être spécifié. Pour cette raison il est d'usage de définir κ au moyen de la chaleur spécifique à pression constante c_p :

$$\kappa = \frac{\lambda}{c_p \rho} \quad (\text{gaz}) \quad (I.14)$$

Par définition, l'eau à 288 K a une valeur $c_s = 1 \text{ kcal}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. La chaleur spécifique, en fait, a été historiquement définie comme la quantité de chaleur (mesurée en Cal) nécessaire pour élever la température d'un kg d'eau de 14,5°C à 15,5°C. Pour l'air dans une large domaine de températures autour de l'ambiante on a une valeur $c_p = 0,24 \text{ kcal}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 1 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, avec la valeur $\rho = 1,225 \text{ kg}/m^3$ à 288 K et à 1 bar. Ces données, mises en mémoire, pourraient permettre le calcul de la conductivité thermique λ si la diffusivité κ était connue. Dans la pratique, il est plus facile de se rappeler, plutôt que les valeurs de κ , celles de son rapport à ν , c'est-à-dire du *nombre de Prandtl* :

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa} \quad (I.15)$$

(sans dimensions parce que ν et κ sont tous deux mesurés en $[m^2/s]$). On peut s'attendre, en fait, à ce que les gaz, où les diffusivités visqueuse et thermique ont la même origine dans l'agitation moléculaire, aient des valeurs de Pr qui ne s'écartent pas beaucoup de l'unité et en fait pour l'air dans les conditions ambiantes, on a $\text{Pr} = 0,71$. Les choses sont différentes avec les liquides où la variabilité de Pr est bien plus forte : si l'eau à 20°C a une valeur $\text{Pr} = 7$, les huiles lubrifiantes à la même température ont une valeur voisine de $\text{Pr} \approx 104$. Ces valeurs, toutefois, diminuent très vite si la température croît, atteignant $\text{Pr} = 500$ à la température de 80°C (en raison de la décroissance importante de la viscosité, la conductivité thermique restant globalement constante). À l'opposé, on trouve les métaux liquides (Hg, Na) qui, compte tenu de leur extrêmement haute conductivité thermique et de leur viscosité comparable à celle de l'eau, ont des nombres de Prandtl très bas, de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-3} .