

# Sommaire

<b>I</b>	<b>Espaces probabilisés</b>	<b>11</b>
I.1	Expérience aléatoire et univers	11
I.2	Événements	12
I.3	Probabilité	14
I.4	Probabilité conditionnelle	21
I.5	Formule des probabilités totales	22
I.6	Formule de Bayes	24
I.7	Indépendance de deux événements	25
I.8	Indépendance de $n$ événements	26
I.9	Énoncé des exercices	27
I.10	Correction des exercices	30
<b>II</b>	<b>Variables aléatoires : généralités</b>	<b>39</b>
II.1	Définition	39
II.2	Loi de probabilité d'une variable aléatoire	40
II.3	Fonction de répartition	41
II.4	Vecteurs aléatoires	44
II.5	Énoncé des exercices	45
II.6	Correction des exercices	46
<b>III</b>	<b>Variables aléatoires discrètes</b>	<b>53</b>
III.1	Définition	53
III.2	Loi de probabilité	53
III.3	Fonction de répartition	55
III.4	Espérance	55
III.5	Composition par une fonction	59
III.6	Variance et écart-type	60
III.7	Énoncé des exercices	63
III.8	Correction des exercices	66
<b>IV</b>	<b>Lois discrètes usuelles</b>	<b>77</b>
IV.1	Loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$	77
IV.2	Loi de Bernoulli	78
IV.3	Loi binomiale	78
IV.4	Loi hypergéométrique	80

IV.5 Loi géométrique .....	82
IV.6 Loi de Poisson .....	83
IV.7 Fonction génératrice .....	84
IV.8 Énoncé des exercices .....	89
IV.9 Correction des exercices .....	92
<b>V Vecteurs aléatoires discrets .....</b>	<b>99</b>
V.1 Loi de probabilité .....	99
V.2 Lois marginales .....	101
V.3 Lois conditionnelles .....	102
V.4 Indépendance de 2 variables aléatoires réelles .....	103
V.5 Espérance du produit de 2 variables aléatoires .....	103
V.6 Indépendance de $n$ variables aléatoires réelles .....	104
V.7 Somme de $n$ variables aléatoires .....	106
V.8 Covariance et coefficient de corrélation linéaire .....	107
V.9 Somme de variables de Bernoulli indépendantes .....	109
V.10 Somme de variables binomiales indépendantes .....	110
V.11 Somme de variables de Poisson indépendantes .....	111
V.12 Énoncé des exercices .....	112
V.13 Correction des exercices .....	115
<b>VI Variables aléatoires à densité .....</b>	<b>129</b>
VI.1 Généralités .....	129
VI.2 Espérance et variance d'une v.a.r. à densité .....	132
VI.3 Loi uniforme sur $[a; b]$ .....	135
VI.4 Loi exponentielle .....	136
VI.5 Loi normale, ou loi de (Laplace-)Gauss .....	137
VI.6 Énoncé des exercices .....	140
VI.7 Correction des exercices .....	142
<b>VII Vecteurs aléatoires à densité .....</b>	<b>151</b>
VII.1 Généralités en dimension 2 .....	151
VII.2 Indépendance de 2 variables à densité .....	152
VII.3 Densité d'une somme de 2 variables à densité .....	154
VII.4 Vecteur aléatoire à densité en dimension $p$ .....	154
VII.5 Indépendance de $p$ variables à densité .....	155
VII.6 Covariance et coefficient de corrélation .....	156
VII.7 Espérance et variance d'une somme de $p$ variables à densité .....	157

---

VII.8 Loi normale en dimension 2 .....	157
VII.9 Loi normale en dimension $p$ .....	161
VII.10 Énoncé des exercices .....	162
VII.11 Correction des exercices .....	164
<b>VIII Suites de variables aléatoires .....</b>	<b>169</b>
VIII.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev .....	169
VIII.2 Convergence en probabilité .....	170
VIII.3 Convergence en loi .....	171
VIII.4 Convergence presque sûre .....	174
VIII.5 Énoncé des exercices .....	175
VIII.6 Correction des exercices .....	177
<b>IX Éléments pour l'Oral du CAPES .....</b>	<b>183</b>
IX.1 Description mathématique d'une expérience aléatoire dans le cas où l'ensemble des événements élémentaires est fini : ensemble des événements élémentaires, événements, probabilité .....	184
IX.2 Probabilité conditionnelle ; indépendance de 2 événements (on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini). Applications à des calculs de probabilité .....	191
IX.3 Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples .....	197
IX.4 Schéma de Bernoulli et loi binomiale. Exemples .....	204
IX.5 Séries statistiques à deux variables numériques. Nuage de points associé. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Droites de régression. Applications. ....	208
 <b>Annexe 1 : séries statistiques doubles .....</b>	<b>213</b>
<b>Annexe 2 : la tribu des boréliens .....</b>	<b>216</b>
<b>Annexe 3 : familles sommables .....</b>	<b>218</b>