Épisode I

LA QUADRATURE DU CERCLE

Le chœur s'émeut :

Tel est le géomètre attaché tout entier
à mesurer le cercle, et qui ne peut trouver
en pensant, le principe qui manque,
tel j'étais moi-même à cette vue nouvelle :
je voulais voir comment se joint
l'image au cercle, comment elle s'y noue ;

La divine comédie, Paradis, Dante

L'énoncé

Au cours de cette première étape de notre voyage dans l'histoire de la quadrature du cercle, nous exposons son énoncé et le contexte dans lequel il est apparu. Nous y rencontrons des personnages plus ou moins illustres dont nous décrivons l'intervention.

Pour notre première rencontre, plongeons-nous dans le Ve siècle av. J.-C. à Athènes où Anaxagore (500 env.-428 av. J.-C.) fut le premier philosophe à s'installer. Maître et ami de Périclès, il abandonna sa fortune personnelle pour consacrer sa vie à l'étude et à la réflexion. Comme de nombreux philosophes de cette période, il cherchait un principe créateur unique qui lui permettrait de rendre compte et d'expliquer l'organisation de l'univers. Pour Thalès, c'était l'eau. Pour Anaximène, l'air jouait ce rôle. Pour Héraclite, le feu était créateur. Et, pour Empédocle, c'est autour des quatre éléments : l'eau, l'air, la terre et le feu que se trouvait la solution.

Pour Anaxagore, rien ne se crée et rien ne périt. Il considère que chaque chose possède en elle-même sa semence. Les aliments qui fortifient notre corps contiennent de façon invisible, les éléments de la chair, des os, du sang... Ainsi en se mélangeant ou en se dissociant, ces semences nourrissent chaque nouvelle chose. Il appelait *Noûs* (l'Esprit) le principe moteur unique qui féconde ces processus et organise le monde. « L'Esprit, pour Anaxagore, est un artiste, et précisément, le tout puissant génie de la mécanique et de l'architecture qui crée avec les moyens les plus simples les formes et les routes les plus grandioses. »[1]

En développant l'observation, en cherchant une explication aux phénomènes de la nature qui ne s'appuie ni sur les croyances religieuses, ni sur les superstitions, il fut l'un des précurseurs du rationalisme. Il comprit le fonctionnement des éclipses et il expliqua la lumière lunaire comme un reflet de celle du soleil. Lors de la chute de la météorite d'Aegos Potamos, nombreux étaient ceux qui crurent y déceler un mauvais présage. Anaxagore, lui, y trouva la confirmation que les planètes et le Soleil ne sont point des divinités, et en particulier que la Lune est constituée comme notre Terre. Par ailleurs, il soutenait que le Soleil est « une masse incandescente d'où toutes choses sont produites ».

Lorsque son ami Périclès passa par une disgrâce politique et que l'on voulut nuire à son entourage, ces propos blasphématoires motivèrent facilement la condamnation du philosophe pour impiété. Anaxagore échappa de justesse à la mort, grâce à l'intervention de son ami. Et, après un séjour en prison, il quitta Athènes pour Lampsaque où il finit ses jours.

1. Friedrich Nietzsche, *La philosophie à l'époque tragique des Grecs.*

Plutarque[1] évoque Anaxagore dans une lettre à un de ses amis condamné à l'exil, à qui il prodigue conseils et consolation. Après quelques banalités d'usage, il lui indique qu'en toutes circonstances, il faut chercher les bons côtés de son infortune. Puis, reprenant les paroles de Socrate (env. 470-399 av. J.-C.), Plutarque explique à son ami que, pour le développement d'un homme, il n'y a point de terreau plus favorable qu'un autre, s'il sait trouver en lui-même les secrets de son épanouissement. Il conclut sa lettre par ces mots :

> En ce qui concerne l'homme, il n'est pas de lieu qui puisse lui ôter son bonheur, non plus que sa vertu et sa sagesse. Anaxagore dans sa prison écrivait sur la quadrature du cercle (…)

Ce court passage constitue une des références les plus anciennes à la quadrature du cercle nommée en tant que telle. Mais quel est ce problème qui permettait à l'esprit d'Anaxagore de s'évader par de hautes considérations géométriques, brisant les murs qui bouchaient son horizon sans restreindre celui de son imagination ?

Son énoncé dans un langage d'aujourd'hui est le suivant :

construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un cercle donné.

Que cache cette question ? Dans quel contexte a-t-elle été posée ? Qu'est-ce qu'un cercle ? Que signifie construire à la règle et au compas ? Pourquoi se limiter à la seule utilisation de cette règle et de ce compas ? Qu'est-ce qu'une quadrature ? Voici quelques-unes des interrogations qu'inspire cet énoncé auxquelles on peut ajouter, une fois qu'on l'a bien cerné, la suivante : mais pourquoi un énoncé apparemment si simple a-t-il posé tant de difficultés ?

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'aborder ces interrogations.

---

1. Philosophe et biographe moraliste ; env. 45-120 apr. J.-C.

Qu'est-ce qu'un cercle ?

Cette question, de prime abord, peut sembler bien banale. Elle mérite, malgré tout, que l'on s'y arrête pour cerner l'objet qui nous occupe. Au cours de l'histoire des mathématiques, la définition du cercle a évolué.

Pour les géomètres de l'Antiquité grecque, un cercle est

> une figure plane contenue par une ligne unique, appelée circonférence, par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont égales entre elles.[1]

Ainsi, un cercle, pour les Anciens, n'est pas la circonférence, mais tous les points entourés par celle-ci. Il est ce que nous appelons aujourd'hui un disque. C'est à partir du XIIIe siècle que le cercle désigne aussi la circonférence. La collusion entre ces deux définitions, entre l'intérieur et le pourtour a persisté bien longtemps. L'article Cercle de la grande *Encyclopédie* du siècle des Lumières prend encore soin de souligner :

> À proprement parler, le cercle est l'espace renfermé par la circonférence, quoique dans l'usage vulgaire on entende par ce mot la circonférence seule.

Aujourd'hui, la question est tranchée. Un cercle est une ligne, la circonférence, qui se boucle sur elle-même en restant à égale distance d'un point donné, le centre.

Dans la suite, nous resterons fidèle à la définition ancienne qui autorise, par exemple, l'utilisation de l'expression : l'aire d'un cercle.

---

1. Définition 15 du livre I des *Éléments* d'Euclide.

Que signifie construire à la règle et au compas ?

Construire une figure géométrique ce n'est pas réaliser un dessin, mais donner et justifier une procédure, purement rationnelle, décrivant les différentes étapes de cette réalisation. Construire à la règle et au compas impose comme condition supplémentaire une limitation à la seule utilisation d'une règle non graduée et d'un compas. Le troisième épisode traitera plus en détail cette question. Mais pour illustrer immédiatement l'énoncé de la quadrature du cercle, nous allons décrire la construction à la règle et au compas d'un carré en partant de deux points A et B qui définissent un de ses côtés.

On trace à la règle la droite (AB), puis, à l'aide d'un compas, le demi-cercle de centre A passant par B situé au-dessus de (AB). On désigne par B′ le point diamétralement opposé à B.

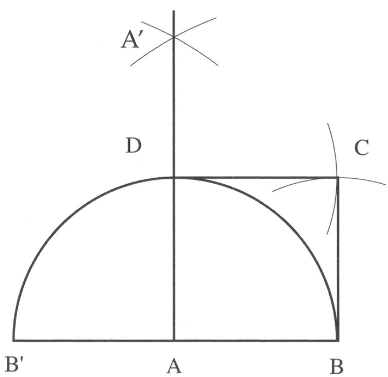

Figure 1 : Construction à la règle et au compas d'un carré.

On choisit un écart de compas quelconque mais supérieur à AB. On pointe celui-ci en B pour tracer un arc de cercle au-dessus de (AB). On effectue la même opération en se plaçant en B′. On nomme A′ le point d'intersection de ces deux arcs de cercle.

On continue en traçant, toujours à la règle, la droite (AA′). Le point d'intersection entre (AA′) et le demi-cercle est un des sommets du carré. On le nomme D.

La construction du quatrième point s'effectue en le considérant comme le point d'intersection de deux arcs de cercle obtenus en pointant le compas – encore – en B puis en D avec un écart égal à AB.

Ainsi, pour construire un carré à la règle et au compas il suffit de disposer d'un de ses côtés. Résoudre la quadrature du cercle revient donc à la construction d'un segment d'une longueur égale à celle du côté du carré souhaité qui lui-même doit avoir la même aire qu'un cercle donné. Notre énoncé pourrait être rédigé différemment : déterminer géométriquement l'aire d'un cercle en construisant un segment…

Aujourd'hui, la détermination de l'aire d'un cercle ne présente plus de difficulté, du moins quand il s'agit d'en donner une valeur numérique approximative. Pour bien comprendre la profondeur et la difficulté de la quadrature du cercle, il est nécessaire de décrire le contexte historique dans lequel elle est née. Les problèmes d'évaluation du périmètre d'une figure géométrique, de l'aire d'une surface ou du volume d'un solide se sont posés très tôt.

Dans des tablettes babyloniennes datant du deuxième millénaire avant notre ère, on trouve des traces de ces questions. Par exemple, le musée du Louvre conserve une tablette de l'époque d'Hammourabi (vers 1800 av. J.-C.) qui expose comment partager un champ en forme de trapèze entre six frères.

Les mathématiques égyptiennes de la même période traitent souvent des calculs d'aire. Le papyrus dit de Rhind du nom de son acquéreur et qui est conservé au British Museum de Londres en est une des sources essentielles. Il a été recopié par le scribe Ahmès vers 1650 av. J.-C. Par exemple, les problèmes 49 et 51 de ce papyrus décrivent les cas d'un rectangle et d'un triangle.

Ces mathématiques anciennes ne présentent pas des méthodes générales de résolution. Les documents dont nous disposons se présentent comme des pièces comptables, des registres dressant un état de l'évolution d'un cheptel, ou encore comme des recueils d'exercices traitant souvent de questions concrètes : les travaux d'art et d'architecture, les questions de partage, les calculs d'intérêt, la mesure d'un champ, la navigation guidée par les étoiles fixes de la voûte céleste. Nombreux sont ceux qui voient dans ces motivations pratiques les origines de la géométrie. À ce propos, Hérodote[1] raconte que le roi d'Égypte Sésostris donna à chacun de ses sujets un terrain de superficie identique qui avait la forme d'un carré. Lors des crues du Nil, le fleuve nourricier et capricieux amputait parfois ces lopins de terre. Des fonctionnaires du royaume venaient alors mesurer la nouvelle surface pour diminuer en proportion la redevance que les paysans égyptiens devaient acquitter. Hérodote conclut le récit de cette anecdote par ces mots : « C'est ce qui donna lieu, à mon avis, à l'invention de la géométrie, que les Grecs rapportèrent dans leur pays ». Cette origine légendaire renvoie à l'étymologie du mot géométrie comme mesure de la terre.

Mais la géométrie, ce n'est point une accumulation de connaissances empiriques permettant à l'homme de se situer dans son environnement. Elle prend toute sa dimension avec la mise en place du raisonnement déductif lequel,

1. Hérodote, *Histoires* (Livre II, 109).

à partir de prémisses ou d'hypothèses, permet d'établir la véracité de propositions à l'aide de la logique. C'est le principe même de la démonstration mathématique. Il serait dérisoire et vain de chercher l'origine de la mise en place de cette démarche. Ce que l'on peut dire, c'est que les géomètres grecs en ont magistralement construit les bases, même s'ils n'en sont sans doute pas les miraculeux créateurs. Ils nous ont légué un corpus riche qui influença pendant des siècles les mathématiciens. La quadrature du cercle fait partie de cet héritage.

Dans ce cadre, comment était traité le problème classique de détermination d'un périmètre, d'une aire ou d'un volume ? Pour mesurer une grandeur d'un type donné (périmètre, aire, volume), le principe est de choisir d'abord comme unité une grandeur de même type, puis de les comparer. D'une certaine façon, mesurer c'est « compter » le rapport entre la grandeur à évaluer et l'unité choisie. Nous avons vu que les cas des figures telles que le triangle, le rectangle, le carré… étaient bien connus depuis longtemps. Mais celui du cercle est beaucoup plus délicat. Il n'était plus possible de se contenter des approximations jusqu'alors utilisées sans que l'on sache très bien, d'ailleurs, si leurs auteurs étaient conscients de l'inexactitude de leur résultat. Le scribe Ahmès dans son problème 50 décrit une méthode de calcul de l'aire d'un cercle de diamètre mesurant 9 khets[1].

Il procède en commençant par retirer au diamètre 1/9 de sa valeur. Sans surprise, il obtient 8. Alors il conclut en disant que l'aire du cercle est égale au produit de 8 par 8, c'est-à-dire à l'aire du carré de côté 8.

1. Le khet était une unité de longueur utilisée dans l'ancienne Égypte. Elle vaut environ 52,5 mètres.