Chapitre 1

Géométrie ordonnée

Nous adoptons dans ce livre le point de vue formaliste de Hilbert dans *Les fondements de la géométrie* [7]. On appelle *géométrie* la donnée d'un ensemble appelé *espace*, dont les éléments sont appelés les *points*, de sous-ensembles appelés *droites* et *plans*, et d'une liste d'*axiomes*, qui sont des énoncés considérés comme vrais dans ladite géométrie. Nous ne donnons pas de définition des mots *points*, *droites*, *plans*, cela conduirait de toute façon à des cercles logiques. Les axiomes sont les règles d'usage de ces mots permettant de construire le discours de la démonstration. Ainsi les démonstrations peuvent être vérifiées de manière purement langagière, indépendamment de toute signification des termes utilisés. C'est notre critère de vérité. Cela n'exclut pas le recours à la signification de ces termes, ni à l'intuition visuelle, pour *comprendre* ces démonstrations (cela est même vivement conseillé !).

Dans la première partie de cet ouvrage, on s'intéresse à la géométrie absolue. Il s'agit d'une géométrie vérifiant les axiomes d'incidence (axiomes 1 à 6), d'ordre (axiomes 7 à 11), et de déplacement (axiomes 12 à 22).

Dans ce chapitre, on commence par étudier la géométrie ordonnée. C'est une géométrie vérifiant les axiomes d'incidence (axiomes 1 à 6) et d'ordre (axiomes 7 à 11). On trouvera en annexe à la fin de l'ouvrage la liste des axiomes.

1.1 Axiomes d'incidence

1.1.1 Entre un point et une droite

Au sens ensembliste, un point peut *appartenir à* une droite. Pour des questions de style, nous utiliserons librement les formulations équivalentes suivantes : le point est *situé sur* la droite, le point est *un point de* la droite, la droite *contient* le point, la droite *passe par* le point. Nous utiliserons par ailleurs le symbole d'appartenance $\in$ lorsque cela permet d'alléger l'exposé.

Axiome 1 *Une droite contient au moins deux points distincts. Par deux points distincts passe une droite et une seule.*

Si A et B sont deux points distincts, on note (AB) la droite passant par A et B. Cet axiome implique que deux droites distinctes (au sens où il existe un point de l'une n'appartenant pas à l'autre) ont au plus un point commun. Lorsqu'elles ont exactement un point commun, on dit qu'elles sont *sécantes*. Si deux droites d_1 et d_2 sont sécantes en un point M, on s'autorisera à noter $d_1 \cap d_2 = M$.

Axiome 2 *Étant donnée une droite, il existe un point non situé sur cette droite.*

1.1.2 Entre un point et un plan

Au sens ensembliste, un point peut *appartenir à* un plan. On utilisera les formulations équivalentes suivantes : le point est *situé sur* le plan, le point est un point *du* plan, le plan *contient* le point, le plan *passe par* le point. On dit que des points sont *alignés* s'ils appartiennent à une même droite.

Axiome 3 *Un plan contient au moins trois points non alignés. Par trois points non alignés passe un plan et un seul.*

Si A, B, C sont trois points non alignés, on note (ABC) le plan passant par A, B, C.

Axiome 4 *Étant donné un plan, il existe un point non situé sur ce plan.*

1.1.3 Entre une droite et un plan

Axiome 5 *Si deux points d'une droite appartiennent à un plan alors tous les points de la droite appartiennent au plan.*

Soit d une droite, et soit Π un plan.
- Si d et Π n'ont aucun point commun, on dit que la droite d est *parallèle* au plan Π, et on note $d \parallel \Pi$.
- Si d et Π ont un unique point M commun, on dit que d et Π sont *sécants* en M, et on note $d \cap \Pi = M$.
- Si d et Π ont deux points communs, alors, d'après l'axiome 5, tous les points de d sont contenus dans Π, auquel cas on dit que d est *contenue dans* Π, et on note $d \subset \Pi$.

1.1.4 Entre deux droites

Proposition 1.1 *Étant donnés un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe un unique plan contenant la droite et le point.*

Preuve. Soit A un point, soit d une droite ne passant pas par A. Soient B et C deux points de d, non confondus (axiome 1). Alors le plan (ABC) contient la droite d (axiome 5), et c'est le seul possible (axiome 3).

Proposition 1.2 *Si deux droites sont sécantes, alors il existe un unique plan contenant ces deux droites.*

Preuve. Soient d et d' deux droites sécantes en un point O. Soit A un point de d' distinct de O, alors A n'appartient pas à d (axiome 1). D'après la proposition précédente, il existe un plan et un seul contenant A et d. Ce plan contient A et O, donc il contient d'. Il ne peut y avoir d'autre plan contenant d et d'. En effet un tel plan contient d et A, son unicité est donc garantie par la proposition précédente.

On dit que deux droites sont *coplanaires* si elles sont situées dans un même plan. Entre deux droites distinctes d et d' trois cas sont possibles :

- Les droites sont coplanaires et sécantes.
- Les droites sont coplanaires et non sécantes, auquel cas on dit qu'elles sont *parallèles*. Lorsque deux droites d et d' sont parallèles, on note $d \parallel d'$.
- Les droites sont non coplanaires et non sécantes.

Lorsque les droites d et d' ne sont pas distinctes, on pourra aussi dire qu'elles sont *confondues*.

1.1.5 Entre deux plans

Axiome 6 *Si deux plans ont un point commun, alors ils ont un deuxième point commun distinct du premier.*

Des axiomes 3, 5 et 6, on déduit facilement qu'entre deux plans distincts Π et Π' deux cas sont possibles. Soit les points communs aux deux plans sont les points d'une droite d , auquel cas on dit que les plans sont *sécants*, et on note $\Pi \cap \Pi' = d$. Soit les deux plans n'ont aucun point commun, auquel cas on dit qu'ils sont *parallèles*, ce que l'on note $\Pi \parallel \Pi'$. Lorsque les plans Π et Π' ne sont pas distincts, on pourra aussi dire qu'ils sont *confondus*.

Proposition 1.3 *Si deux plans sont parallèles, et si un troisième les coupe tous deux, alors les droites d'intersection sont parallèles.*

Preuve. Soient Π et Π' deux plans parallèles. Supposons qu'un troisième plan coupe Π suivant une droite d et Π' suivant une droite d'. Les droites d et d' ne peuvent être sécantes, sinon les plans Π et Π' seraient sécants. Par ailleurs d et d' sont coplanaires. On en conclut que $d \parallel d'$.

Proposition 1.4 (Théorème du toit) *Soient* Π *et* Π' *deux plans sécants suivant une droite* k*. S'il existe une droite* d *contenue dans* Π*, et une droite* d' *contenue dans* Π'*, telles que* $d \parallel d'$*, alors les droites* k *et* d *sont parallèles ou confondues.*

Preuve. Supposons que les droites k et d ne sont pas parallèles. Comme elles sont coplanaires, elles ont un point commun A. Le point A n'est pas sur d', car $d \parallel d'$. On en déduit qu'il existe un unique plan contenant A et d'. Or, d'une part le plan Π' contient A et d', d'autre part le plan défini par les droites d et d' contient A et d'. Donc ces deux plans sont confondus, ce qui prouve que d est dans Π'. On en conclut que d est la droite d'intersection de Π et Π', ainsi d et k sont confondues.

1.2 Axiomes d'ordre

Axiome 7 *Pour tout triplet* (A, B, C) *de points alignés deux à deux distincts, il existe une relation binaire s'énonçant ainsi : soit* B *est entre* A *et* C*, soit* B *n'est pas entre* A *et* C*.*

Axiome 8 *Si* B *est entre* A *et* C*, alors* B *est entre* C *et* A*.*

Axiome 9 *Si* B *est entre* A *et* C*, alors* A *n'est pas entre* B *et* C*.*

Axiome 10 *Si* A *et* B *sont deux points distincts, alors il existe un point* C *aligné avec* A *et* B *tel que* B *soit entre* A *et* C*.*

Si A et B sont deux points, on appelle *segment* AB l'ensemble des points situés entre A et B. D'après l'axiome 8, les segments AB et BA contiennent les mêmes points. On dit que A et B sont les *extrémités* du segment AB.

Puisque la relation *être entre* porte sur des points deux à deux distincts, d'une part les points A et B n'appartiennent pas au segment AB, d'autre part le segment AA est vide. On dit qu'un segment dont les extrémités sont confondues est un *segment nul*. On appelle *segment fermé* $[AB]$ l'union du segment AB et des points A et B.

On dit qu'une droite d *coupe* un segment non nul AB si d est sécante avec la droite (AB), et si le point d'intersection appartient au segment AB (il est donc distinct de A et B).

Axiome 11 (Pasch) *Soient* A*,* B*,* C*, trois points non alignés, et* d *une droite ne passant par aucun de ces trois points. Si* d *coupe un des trois segments* AB*,* BC*, ou* CA*, alors* d *en coupe un second.*

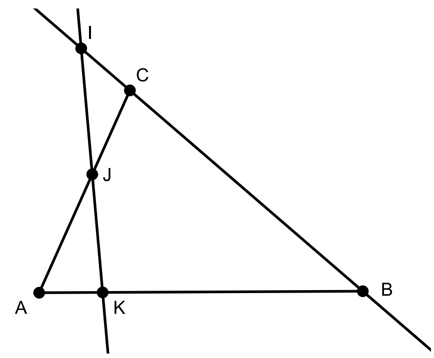

FIGURE 1.1 – Lemme de Pasch

Lemme 1.5 (Pasch) *Soient A, B, C trois points non alignés (figure 1.1). Soit I un point de la droite (BC) tel que C soit entre I et B. Soit d une droite passant par I. Si la droite d coupe un des segments AC ou AB, alors elle coupe l'autre. De plus, si J et K sont les points d'intersection respectifs de d avec AC et AB, alors J est entre I et K.*

Preuve. Étudions le cas où la droite d coupe le segment AB en K, l'autre cas se traitant de façon analogue. Puisque C est entre I et B, I n'est pas entre C et B (axiome 9). Il en résulte que la droite d ne coupe pas le segment BC. Par ailleurs, la droite d ne passe ni par A, ni par B, car elle coupe le segment AB, et elle ne passe pas par C, sinon elle serait confondue avec la droite (IC), et passerait donc par B. D'après l'axiome de Pasch, la droite d coupe nécessairement le segment AC en un point J. Il reste à prouver que J est entre I et K. Il suffit d'appliquer la première partie du lemme de Pasch, que nous venons de démontrer, aux points B, I, K, et à la droite (AC).

Proposition 1.6 *Si A et B sont deux points distincts, alors il existe un point K situé entre A et B.*

Preuve. D'après l'axiome 2 , il existe un point J n'appartenant pas à la droite (AB) (figure 1.1). D'après l'axiome 10, il existe un point C tel que J soit entre A et C, et un point I tel que C soit entre B et I. Il suffit alors d'appliquer le lemme de Pasch aux points A, B, C pour démontrer que la droite (IJ) coupe le segment AB en un point K.

Proposition 1.7 *Si trois points deux à deux distincts sont alignés, alors l'un d'entre eux est situé entre les deux autres.*

Preuve. Soient A, B, K trois points alignés et deux à deux distincts. Supposons que A n'est pas entre B et K, et que B n'est pas entre A et K, démontrons que K est entre A et B (figure 1.1). Soit J un point n'appartenant pas à la droite

(AB) (axiome 2). Soit I un point tel que J soit entre I et K. On applique le lemme de Pasch aux points B, I, K, ce qui prouve que la droite (AJ) coupe le segment BI en un point C, et que J est entre A et C. On applique alors le lemme de Pasch aux points A, B, C, ce qui prouve que la droite (IJ) coupe le segment AB. Comme le point d'intersection est K, on a démontré que K est entre A et C.

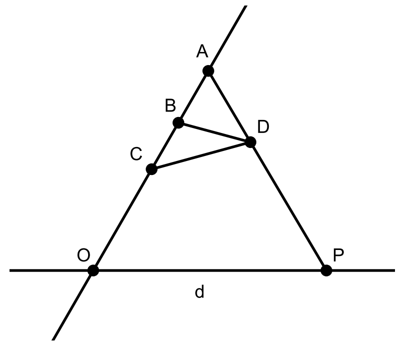

FIGURE 1.2 – Régionnement du plan

1.3 Demi-plan, demi-droite, demi-espace

1.3.1 Demi-plan

Considérons un plan Π et une droite d contenue dans Π. On dit que deux points A et B, contenus dans Π mais pas dans d, sont *de part et d'autre* de d si la droite d coupe le segment AB. Dans le cas contraire, on dit que A et B sont du *même côté* de d.

Proposition 1.8 *La relation* être du même côté *de la droite d est une relation d'équivalence*[1] *sur les points du plan* Π *n'appartenant pas à d. Il y a deux classes d'équivalence pour cette relation.*

Une classe d'équivalence est appelée un *demi-plan (ouvert)*. La droite d est appelée le *bord*, ou encore la *frontière*. Les deux demi-plans ayant le même bord sont dits *opposés*. On appelle *demi-plan fermé* l'union d'un demi-plan ouvert et de son bord.

Preuve. La relation est trivialement réflexive et symétrique, il reste à prouver qu'elle est transitive. Soient A, B, C trois points du plan Π non situés sur la droite d. On suppose que A et B sont du même côté de d, et que B et C sont du

1. Pour la notion de relation d'équivalence on pourra consulter par exemple [11].

même côté de d, on veut montrer que A et C sont du même côté de d. Dans le cas où les points A, B, C ne sont pas alignés, c'est une conséquence directe de l'axiome de Pasch. Dans le cas où les points A, B, C, sont alignés, si la droite qui les contient ne coupe pas d, c'est trivial. Si elle coupe d en un point O, soit P un point de d distinct de O, et soit D un point du segment AP (figure 1.2). La droite d ne coupe ni le segment AB, ni le segment AD. D'après l'axiome de Pasch, elle ne coupe pas le segment BD. Comme elle ne coupe pas le segment BC, d'après l'axiome de Pasch elle ne coupe pas le segment CD. Comme elle ne coupe pas le segment AD, d'après l'axiome de Pasch elle ne coupe pas le segment AC. On en conclut que A et C sont du même côté de d.

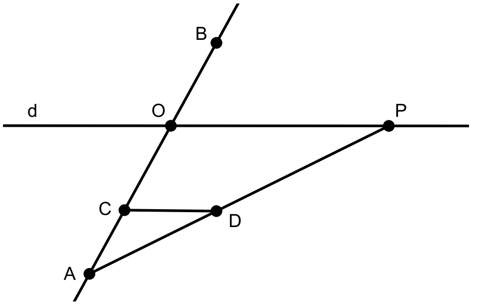

FIGURE 1.3 – Régionnement du plan

Il reste à démontrer qu'il y a deux classes d'équivalence. Il y en a au moins deux. En effet soit A un point non situé sur d (axiome 2), soit O un point de d, et soit B un point de la droite (AO) tel que O soit entre A et B (axiome 10). Alors les classes d'équivalence de A et B sont deux classes distinctes. Vérifions qu'il n'y en a pas d'autres. Soit C un point n'appartenant pas à la classe d'équivalence de B, démontrons que C est dans la classe d'équivalence de A, c'est-à-dire que A et C sont du même côté de d. Si les points A, B, C ne sont pas alignés, il suffit d'appliquer le lemme 1.9. Si les points A, B, C sont alignés (figure 1.3), soit P un point de d distinct de O, et soit D un point du segment AP. On applique le lemme de Pasch aux points A, B, D, et à la droite d, ce qui permet de démontrer que la droite d coupe le segment BD. Les points B et D sont donc de part et d'autre de d. Par ailleurs les points B et C sont de part et d'autre de d, et les points B, C, D ne sont pas alignés. On en déduit que les points C et D sont du même côté de d. Comme les points A et D sont du même côté de d, et que l'on a déjà démontré la transitivité de la relation *être du même côté*, on en conclut que A et C sont du même côté de d.

Lemme 1.9 *Soient A, B, C trois points non alignés. Si une droite d coupe les segments AB et AC, alors elle ne coupe pas le segment BC.*

Preuve. Supposons que la droite d coupe le segment BC. Notons P, Q, R les points d'intersection respectifs des segments BC, CA, AB avec la droite d (figure 1.4). Appliquons le lemme de Pasch aux points B, Q, C, cela prouve que la droite (AP) coupe le segment BQ en un point N situé entre A et P. Par conséquent, le même lemme, appliqué aux points B, Q, R, permet d'affirmer que la droite (AN) coupe le segment RQ en un point M situé entre A et N.
Puisque N est entre A et P, P n'est pas entre A et N (axiome 9). Par conséquent M et P sont distincts. Or ce sont deux points communs aux droites d et (AP). Celles-ci sont donc confondues, ce qui implique que A est sur d. Ceci contredit le fait que d et (AC) sont sécantes en Q situé entre A et C. On en conclut que la droite d ne coupe pas le segment BC.

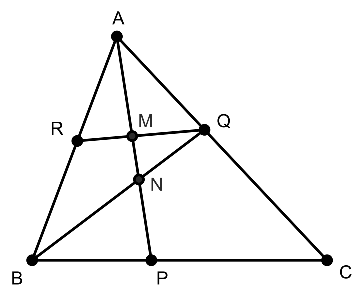

FIGURE 1.4 – Sécante avec un triangle

1.3.2 Demi-droite

Considérons une droite d et un point O situé sur d. Soient A et B deux points de la droite d distincts de O. Si O est entre A et B, on dit que A et B sont *de part et d'autre* de O. Sinon, on dit que A et B sont *du même côté* de O. Notons que si A et B sont du même côté de O (resp. de part et d'autre), alors A et B sont du même côté (resp. de part et d'autre) de toute droite coupant d en O. Réciproquement, s'il existe une droite coupant d en O telle que A et B soient du même côté (resp. de part et d'autre) de cette droite, alors A et B sont du même côté (resp. de part et d'autre) de O. Ceci permet de faire le lien avec l'ordre dans le plan, et nous en déduisons facilement la proposition suivante.

Proposition 1.10 *La relation* être du même côté *de O est une relation d'équivalence sur les points de d distincts de O. Il y a deux classes d'équivalence pour cette relation.*

Une classe d'équivalence est appelée une *demi-droite (ouverte)*. Le point O est appelé l'*origine*. Les deux demi-droites ayant la même origine sont dites *opposées*. On appelle *demi-droite fermée* l'union d'une demi-droite ouverte et de son