Chapitre I

POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Sommaire

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions en détail les fonctions polynômes du second degré afin qu'elles n'aient plus aucun secret pour nous, du point de vue réel du moins. En effet, nous serons à même de déterminer l'existence et les valeurs des racines, les variations, les extremums,... Les polynômes du second degré, basés sur la fonction carré, modélisent par exemple le mouvement d'un solide en chute libre.

Nous abordons ensuite la notion de polynômes de degré quelconque. Outre leur facilité de calcul, leur utilité dans la résolution d'équations et les nombreuses modélisations en faisant usage, les fonctions polynômes permettent d'approcher localement toute fonction dérivable (cf. chapitre II). Ils sont ainsi d'une importance capitale dans de nombreux domaines.

Diophante d'Alexandrie, entre le Ier s. et le IVe s. après J.C., s'intéresse déjà aux équations et en particulier à celles du second degré. Ses études sont les prémices de l'algèbre, un terme venant de l'arabe. En effet, l'école de Bagdad et en particulier le travail novateur d'Al-Khwârizmî au VIIIe s., son nom ayant donné le terme *algorithme*, permet de belles avancées et on le considère désormais comme le père de cette discipline mais il reste tributaire des lacunes des notations algébriques, des traditions géométriques et de l'absence du concept de nombres négatifs. L'étude que nous faisons ici est bien l'aboutissement d'un cheminement intellectuel multi-millénaire.

En préambule, commençons par un peu de logique (cf. *En toute logique*, p. 313, pour de bien plus amples informations).

Définition 1 • *Le symbole $\exists$ est le **quantificateur existentiel** et signifie « **il existe** » au moins un(e).*
• *Le symbole $\forall$ est le **quantificateur universel** et signifie « **pour tout** ».*

Exemples :
- « $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x < 0$ » signifie « il existe au moins un réel strictement négatif ».
- « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0$ » signifie « pour tout réel x, x^2 est positif ou nul ».
- La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x \leqslant y$ » est vraie
  alors que la proposition « $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ x \leqslant y$ » est fausse.

1 Variations et extremum d'une fonction : rappels

Définition 2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
- *f est croissante sur I ssi f conserve l'ordre sur I*
  ssi $\forall a$ et $b \in I, \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.
- *f est décroissante sur I ssi f inverse l'ordre sur I*
  ssi $\forall a$ et $b \in I, \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b)$.
- *f est monotone sur I si f est croissante sur I ou décroissante sur I.*

Décrire les variations de f, c'est déterminer les intervalles de monotonie de f. Les résultats sont souvent présentés dans un tableau de variation.

Remarque : Attention, une fonction n'admet pas nécessairement d'intervalle de monotonie. Autrement dit, il n'existe pas forcément d'intervalle sur lequel on puisse dresser un tableau de variation.

Esquisser par exemple le graphe de la fonction $\chi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & sinon. \end{cases}$
Ne ressemble-t-il pas à deux droites parallèles ?

Définition 3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel de I.*

- *f atteint en a un maximum sur I si $\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant f(a)$.*
- *f atteint en a un minimum sur I si $\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a)$.*
- *f admet un extremum en a sur I*
  si f admet un maximum ou un minimum en a sur I.

Ainsi, un extremum d'une fonction est une valeur atteinte par la fonction.

Définition 4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel de I. On dit que a est un **zéro** de f ou que a est une **racine** de f si $f(a) = 0$ c.-à-d. si f s'annule en a.*

2 Définitions et premières propriétés

2.1 Définition, forme canonique

Définition 5 *Une fonction **polynôme du second degré** P est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe trois réels a, b et c ($a \neq 0$) tels que, pour tout réel x, $\boldsymbol{P(x) = ax^2 + bx + c}$.*

Cette écriture est la **forme développée** du polynôme, ou **trinôme**, P.

Exemples : ◦ La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est un polynôme du second degré :
$a = 1, \quad b = 0$ et $c = 0$.
◦ La fonction $x \longmapsto -3 + 4x^2 - \frac{7}{5}x$ est un polynôme du second degré :
$a = 4, \quad b = -\frac{7}{5}$ et $c = -3$.
◦ La fonction $x \longmapsto 3(x-1)^2 + 5$ est un polynôme du second degré :
$a = 3, \quad b = -6$ et $c = 8$.

Cette dernière écriture est une forme spécifique du trinôme et elle apporte de nombreuses informations sur celui-ci. Nous démontrerons cette propriété avec le théorème 1 en page 12.

Propriété 1 ***Forme canonique***
Une fonction P est un polynôme du second degré ssi il existe trois réels a, α et β ($a \neq 0$) tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$.
*Cette écriture de P est appelée la **forme canonique** de P.*

La forme canonique d'un trinôme se trouve généralement en l'écrivant comme le début d'un carré remarquable.

Exemples : ◦ L'écriture $3(x-1)^2 + 5$ est la forme canonique de la fonction polynôme $3x^2 - 6x + 8$.
◦ La fonction $x \mapsto x^2 + 2x + 1$ admet pour forme canonique $(x+1)^2$.

◦ $5x^2 - 30x + 17 = 5(x^2 - 6x) + 17 = 5(x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 - 3^2) + 17$
$= 5(x-3)^2 - 5 \times 9 + 17 = 5(x-3)^2 - 28.$

Exercice 1 Déterminer la forme canonique des fonctions polynômes suivantes.

$f(x) = 4x^2 - 24x + 41$ $\qquad$ $k(x) = -3x^2 + 30x - 75$

$g(x) = -2x^2 + 16x - 37$ $\qquad$ $p(x) = -x^2 - 4x + 1$

$h(x) = 3x^2 - 6x - 1$ $\qquad$ $q(x) = 2x^2 - 2x - 24$

Exercice 2 Déterminer la forme développée des fonctions polynômes suivantes.

$r(x) = 5(x-2)^2 - 7$ $\qquad$ $s(x) = -2(x+6)^2 + 1$

Exercice 3 Déterminer les racines éventuelles des huit fonctions polynômes des exercices 1 et 2 précédents puis visitez *La racine, c'est carré* en page 335.

2.2 Variations d'un trinôme

Propriété 2 *Soient a, α et β trois réels ($a \neq 0$).*
La fonction $x \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ *admet un **extremum** en $\boldsymbol{\alpha}$ valant $\boldsymbol{\beta}$.*
Cet extremum est un minimum si $a > 0$, un maximum si $a < 0$.

Démonstration : D'une part, $\alpha \longmapsto a(\alpha-\alpha)^2+\beta = a \times 0^2 + \beta = \beta$. D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-\alpha)^2 \geqslant 0$ donc, si $a > 0$, $a(x-\alpha)^2 \geqslant 0$ d'où $a(x-\alpha)^2 + \beta \geqslant \beta$ et, si $a < 0$, $a(x-\alpha)^2 \leqslant 0$ d'où $a(x-\alpha)^2 + \beta \leqslant \beta$. β est donc bien la plus petite (*resp.* grande) valeur atteinte. □

Propriété 3 *Un trinôme du second degré* $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ *admet l'un des tableaux de variations suivants.*

***a* > 0**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
P		↘	β	↗	

***a* < 0**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
P		↗	β	↘	

Démonstration : Nous allons par exemple démontrer que P est croissante sur $]-\infty\,;\alpha[$ lorsque $a < 0$.
Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $]-\infty\,;\alpha[$.
On a $x_1 < x_2 < \alpha \iff x_1 - \alpha < x_2 - \alpha < 0 \iff (x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$ car la fonction carré est strictement décroissante sur les réels négatifs. D'où, a étant négatif, $a(x_1-\alpha)^2 < a(x_2-\alpha)^2$ et $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$.
Ainsi $P(x_1) < P(x_2)$. □

Exercice 4 Dresser le tableau de variation et déterminer l'extremum de chacune des fonctions des exercices 1 et 2.

Exercice 5 On définit le trinôme t sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = 2x^2 + 14x + 67$.
Déterminer la forme canonique de t puis en déduire son extremum, ses variations et ses racines éventuelles.

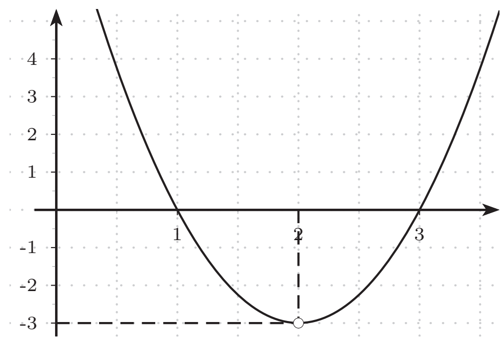
2.3 Représentation graphique d'un trinôme

Définition 6 *La représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction polynôme du second degré s'appelle une **parabole**.*
*Si le trinôme admet pour forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$, le point $\boldsymbol{S\,(\,\alpha\,;\,\beta\,)}$ est le **sommet** de cette parabole.*

Dans un repère orthogonal, les paraboles sont de deux types, suivant le signe de a :
« les bras en haut », « en $\bigcup$ », si $a > 0$ et « les bras en bas », « en $\bigcap$ », si $a < 0$.

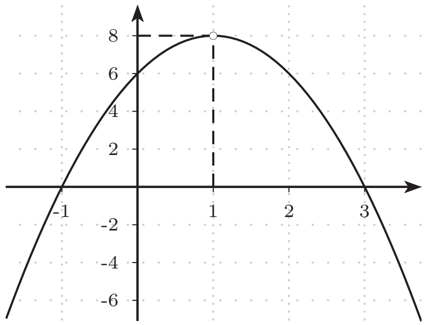
Exemples :

$\boldsymbol{a > 0}$



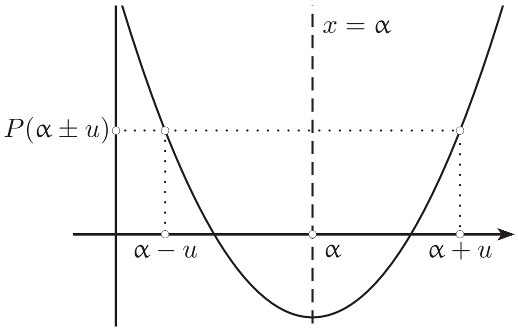
$f(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-2)^2 - 3$

$\boldsymbol{a < 0}$



$g(x) = -2x^2 + 4x + 6 = -2(x-1)^2 + 8$

Propriété 4 *Dans un repère orthogonal, une parabole représentant une fonction polynôme du second degré admet pour **axe de symétrie** la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par son sommet.*



Visitez donc l'extra *Conic Strip* en page 349 pour de plus amples informations.

Démonstration : Remarquons tout d'abord que les points du plan symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$ sont de la forme $(\,\alpha - u\,;\,y\,)$ et $(\,\alpha + u\,;\,y\,)$.

Soit $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ une fonction polynôme du second degré et soit $u \in \mathbb{R}$.
On a $P(\alpha + u) = a(\alpha + u - \alpha)^2 + \beta = au^2 + \beta$
et $P(\alpha - u) = a(\alpha - u - \alpha)^2 + \beta = a(-u)^2 + \beta = P(\alpha + u)$.
Ainsi, les points $(\alpha - u\,;P(\alpha - u))$ et $(\alpha + u\,;P(\alpha + u))$ appartiennent tous deux à la parabole représentative de P et sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$. □

Exercice 6 La fonction f est un polynôme du second degré admettant 3 pour maximum. On note $\mathscr{P}$ sa représentation graphique. On sait de plus que $f(0) = f(2)$.

1. Pour tout réel x, on pose $f(x) = ax^2 + bx + c$. Quel est le signe de a ?
2. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{P}$ puis dresser le tableau de variations de f.
3. On donne $a = -2$. Calculer les réels b et c sans utiliser la forme canonique de f.
4. Retrouver la forme canonique de f puis calculer ses racines éventuelles.

3 Discriminant, factorisation et signe d'un trinôme

3.1 Discriminant d'un trinôme

Nous avons vu la définition de la forme canonique d'un polynôme du second degré. Le théorème suivant nous en donne la formule générale.

Théorème 1 *Soit* $P(x) = ax^2 + bx + c$ *un polynôme du second degré* ($a \neq 0$).
On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{P(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}$ *où* $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$
est appelé le ***discriminant*** *de* P.

Démonstration : Un simple développement donne le résultat.
En effet, pour tous réels x, $a \neq 0$, b et c, on a :

$$\begin{aligned} a\left(x - \tfrac{-b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a} &= a\left[x^2 - 2x\tfrac{-b}{2a} + \left(\tfrac{-b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}\right] = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

□

Ainsi, dans l'écriture de la forme canonique du § 2, on a

$$\boldsymbol{\alpha = -\frac{b}{2a}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}}.$$

Pour déterminer la forme canonique d'un polynôme du second degré, on peut utiliser la formule précédente ou écrire le trinôme comme le début d'une identité remarquable.

Exercice 7 Retrouver les formes canoniques des fonctions de l'exercice 1 en utilisant la formule du théorème 1.

Le discriminant ainsi défini est un réel typique du trinôme puisqu'il va nous permettre de déterminer sa « catégorie » et d'obtenir un certain nombre de propriétés de ce trinôme.

3.2 Factorisation d'un trinôme

Nous remarquons dans les exemples précédents que la forme canonique d'un polynôme du second degré est du type A^2+B^2, $-A^2-B^2$ ou A^2-B^2 suivant le signe de Δ et de a et nous savons bien que seule la dernière écriture se factorise. Lorsque $\boldsymbol{\Delta \geqslant 0}$, on peut écrire :

$$a\left[\left(x-\tfrac{-b}{2a}\right)^2-\tfrac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left[x-\tfrac{-b}{2a}-\sqrt{\tfrac{\Delta}{4a^2}}\right]\left[x-\tfrac{-b}{2a}+\tfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}\right]$$
$$=a\left(x-\tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Les deux nombres $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ sont ainsi les racines du polynôme. Lorsque $\Delta=0$, ces deux nombres sont confondus et l'on parle alors de « racine double ». Si $\Delta<0$, la forme canonique ne peut se factoriser et le trinôme n'admet aucune racine.

Théorème 2 ***Factorisation des polynômes du second degré***
Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme $(a\neq 0)$ et soit $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.
Si $\boldsymbol{\Delta>0}$, P admet deux racines réelles distinctes

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et a pour forme factorisée $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Si $\boldsymbol{\Delta=0}$, P admet une unique racine réelle, dite « double », $x_0=\dfrac{-b}{2a}$
et a pour forme factorisée (et canonique) $P(x)=a(x-x_0)^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$.
Si $\boldsymbol{\Delta<0}$, P n'admet aucune racine réelle et n'a pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Déterminer les racines et la forme factorisée éventuelles des fonctions des exercices 1 et 2.

Remarque : Soient u et $v\in\mathbb{R}$. Les polynômes du second degré s'annulant en u et en v sont exactement ceux pouvant s'écrire sous la forme $a(x-u)(x-v)$ où $a\in\mathbb{R}$.

Propriété 5 *Soient S et P deux réels et l'on pose $P(x)=x^2-Sx+P$.*
P admet les racines réelles x_1 et x_2 si, et seulement si, $x_1+x_2=S$ et $x_1\,x_2=P$.

Démonstration : Elle sera faite dans l'exercice 20 en page 18. □

Exercice 9

1. Déterminer les racines des polynômes x^2-5x+6, $x^2-10x+21$ et $2x^2+4x-48$.
2. Déterminer deux réels dont la somme vaut 1 et le produit vaut -1.

3.3 Signe d'un trinôme

Une fois que l'on a déterminé les éventuelles racines d'un trinôme, il est aisé d'en déterminer le signe puisque ses variations sont données par le signe de a.

Théorème 3 *Soit* $P(x) = ax^2+bx+c$ *un trinôme* $(a \neq 0)$ *et soit* $\Delta = b^2-4ac$ *son discriminant.*

Si $\mathbf{\Delta > 0}$, P *est du signe contraire à a entre ses racines* $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et du signe de a à « l'extérieur » de ses racines.*

Si $\mathbf{\Delta = 0}$, P *est nul en la racine « double »* $x_0 = \frac{-b}{2a}$ *et il est du signe de a partout ailleurs.*

Si $\mathbf{\Delta < 0}$, P *est du signe de a sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration : Il suffit de tracer les différentes configurations de paraboles possibles pour s'en convaincre (cf. § 5). □

Exercice 10 Dresser le tableau de signes des fonctions des exercices 1 et 2.

Grâce au discriminant, nous avons désormais un algorithme de résolution des équations et inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$ mais rien ne vous empêche d'aller travailler votre maîtrise des résolutions d'équations dans l'extra de la page 337.

4 Polynômes de degré supérieur

4.1 Définitions

Définition 7 *Un polynôme réel P est une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *telle qu'il existe un entier naturel n et des réels* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *tels que, pour tout réel x,*

$P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ \ldots\ + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_n\,x^n$.

Si $a_n \neq 0$, ***n*** *est appelé le* ***degré*** *du polynôme P, noté* $d^\circ(P)$.

Le terme $a_i x^i$ *est appelé* ***monôme*** *de degré i.*

Exemples :
- La fonction $x \longmapsto -2x^6 + x^5 + 4x^3 - 7x$ est un polynôme de degré 6.
- La fonction $x \longmapsto 3x^4 - 5x^7 + 2x - 1$ est un polynôme de degré 7.
- La fonction $x \longmapsto 5x - 3$ est un polynôme de degré 1. Elle est donc affine.
- La fonction $x \longmapsto 2x^3 - 5x^2 + 4\cos x + 7$ n'est pas un polynôme.
- La fonction $x \longmapsto 0$ est un polynôme de degré $-\infty$ (ou alors indéfini).

Le résultat suivant est très intuitif et nous l'admettrons. Il découle du fait bien connu que, dans $\mathbb{R}$, un produit est nul *ssi* l'un des facteurs est nul.

Théorème 4 *Deux fonctions polynômes P et Q sont égales (sur* $\mathbb{R}$*) ssi elles ont même degré et leurs coefficients sont égaux deux à deux.*

Exemples : $3x^4 + 5$ et $3x^5 + 4$ ne sont pas égaux.
En revanche, $x^3(10x^4 - 5x^2)$ et $-5x^2(x^3 - 2x^5)$ le sont (identifier les coeff.).