Chapitre I

Les nombres réels

Sommaire

La notion de nombre vous semble aller de soit mais elle n'est en fait pas si évidente : le cas des nombres irrationnels, ceux qui ne sont pas des fractions, en est un exemple. Pourtant déjà pressentis il y a 4 000 ans par les babyloniens puis les égyptiens, la découverte de l'existence des nombres irrationnels a provoqué une réelle crise chez les mathématicien grecs. Citons Procus, historien et philosophe du V^{e} s. : « *On dit que les gens qui ont divulgué les nombres irrationnels ont péri dans un naufrage jusqu'au dernier, car l'inexprimable, l'informe, doit être absolument tenu secret ; ceux qui l'ont divulgué et ont touché à cette image de la vie ont instantanément péri et doivent rester éternellement ballottés par les vagues.* » Il faudra alors attendre les mathématiques indiennes puis arabes au tournant du premier millénaire pour que ces irrationnels acquièrent enfin le statut de nombres. Nous allons voir lequel.

Commençons donc l'année par rappeler quelques définitions et notions de base du calcul tout en précisant davantage les objets de cette étude que sont les nombres. Nous apprendrons à les représenter et définirons les différents types de nombres que nous pouvons rencontrer. Nous introduirons la notion d'intervalle pour affiner le concept d'encadrement et celle de valeur absolue qui est en lien avec l'idée de distance.

En préambule, voici quelques notations que nous utiliserons avec parcimonie.
Le symbole $\forall$ signifie « pour tout » tandis que le symbole $\exists$ signifie « il existe », et lui adjoindre un « ! », rajoute « un unique ». Deux exemples suivent.

◦ $\forall x,\ \exists y$ tq. $y \leqslant x$ signifie « Pour tout x, il existe un y tel que $y \leqslant x$ » : vrai.
◦ $\exists! z$ tq. $\forall t,\ z > t$ signifie « Il existe un unique z tel que, pour tout t, $z > t$ » : faux.
Pour de bien plus amples précisions, allez donc lire *En toute logique* en page 339.

1 Puissances entières, racine carrée

Voici de quoi se rafraîchir la mémoire.

Définition 1 *Soit x un nombre réel et n un entier naturel non nul (cf. § 2). On définit les puissances suivantes :* $x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$
et pour $x \neq 0$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $x^0 = 1$.

Vous avez certainement remarqué que l'on a pas défini la puissance 0 de 0. En effet, on hésite entre 0 et 1 et l'on ne sait se décider.

Exemples : $2^3 = 8$, $(-6)^2 = 36$, $(-5)^3 = -125$, $(-1)^{19} = -1$, $2^{-4} = \frac{1}{16}$, $-(7)^{-2} = -\frac{1}{49}$.

Propriété 1 *Pour a et b deux nombres réels non nuls, m et n deux entiers relatifs (cf. § 2), on a :*
$a^n.b^n = (ab)^n$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $a^m.a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$.

Exercice 1 Effectuer, sans calculatrice, les calculs suivants.

(a) $3 - \frac{5}{7} =$
(b) $19^2 =$
(c) $6 \times \frac{7}{3} - 28 \times \frac{2}{4} =$
(d) $3^2 - 2^3 =$
(e) $37,2^0 =$
(f) $-1^0 =$

Exercice 2 Transformer les écritures suivantes :
$2^3.5^3$, $\frac{4^5}{8^5}$, $2^4.2^3$, $\frac{6^2}{6^3}$, $3^2.3^{-5}$, $(2^3)^{-4}$, $6^4.15^{-2}$.

Exercice 3 Écrire sous la forme $a^p.b^q$ où $p, q \in \mathbb{Z}$ les nombres suivants :
$a^{2^3} a^{-5}$, $\frac{(a^4)^2.b^{-5}}{(ab)^{-1}}$, $\left(\frac{a}{b^{-1}}\right)^5.\frac{b}{a \times a^3}$.

Exercice 4

1. Déterminer la première puissance de 3 supérieure ou égale à 234, puis celle de 7 supérieure ou égale à 54 689.

2. $\int$ Pour a et A strictement positifs, écrire un algorithme donnant la première puissance de a supérieure à A.

Exercice 5 Résoudre $a^2 = 9$, $b^2 = 25$, $c^2 = 0$, $d^2 = 7$, $e^2 = -4$.

Définition & Propriété 2
Pour tout un nombre réel positif ou nul x, il existe un unique réel positif de carré x. Ce réel est appelé la racine carrée de x et il est noté $\sqrt{x}$:
$\forall x \geqslant 0,\ \exists! y = \sqrt{x} \geqslant 0$ *tq.* $(\sqrt{x})^2 = x$.

Dans l'écriture $\sqrt{a}$, le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé *radical* et a est appelé *radicande*.

Exemples : ◦ $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$, ◦ $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$,

◦ $\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6 = 3 \times 2 = \sqrt{9}\,\sqrt{4}$,

◦ $\sqrt{2} \simeq 1,414 < 2 = \sqrt{1} + \sqrt{1}$, ◦ $\sqrt{3} \simeq 1,732 < 3 = \sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{1}$,

◦ $\sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$, ◦ $\sqrt{16+9} = \sqrt{5^2} = 5 < 4 + 3 = \sqrt{16} + \sqrt{9}$.

Propriété 3

- *Pour tous a et b positifs, on a* $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ *et si $b \neq 0$,* $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- *Si a et b sont strictement positifs, on a* $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration : Pour a et b positifs, on a $(\sqrt{ab})^2 = ab = (\sqrt{a})^2\,(\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2$ donc $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$ sont deux nombres positifs de même carré. Par unicité de la racine carrée, ils sont égaux.
Nous démontrerons le deuxième point dans un chapitre ultérieur (cf. ex. 10 p. 89). □

Remarque : Il se peut que seul l'un des membres de ces égalités soit défini.
Par exemple, $\sqrt{(-9) \times (-4)} = \sqrt{36} = 6$ mais on ne peut définir de racine carrée ni pour -9 ni pour -4. Pour plus de pratique, visiter l'extra de la page 361.

Exercice 6 Exprimer sous la forme $a\sqrt{b}$ les nombres suivants :
$\sqrt{45}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{588}$, $\sqrt{1225}$, $\sqrt{6300}$.

Exercice 7 ∫ L'algorithme de Héron d'Alexandrie, mathématicien grec du Ier s., permet de calculer des valeurs approchées de la racine carrée d'un réel positif.
Nous ne pourrons justifier l'efficacité du processus mais rien n'empêche de l'observer.
Voici la démarche : pour approcher la racine d'un réel positif a, on choisit un nombre r strictement positif, disons $u = 1$ par exemple, puis on calcule $\dfrac{r + \frac{a}{r}}{2}$ et l'on réitère ce calcul en remplaçant r par la valeur que l'on a obtenue.

1. Appliquer ce processus un certain nombre de fois pour approcher $\sqrt{2}$.
2. Compléter cette fonction Python (cf. *Algo à gogo* en page 317) puis l'exécuter. Très efficace, n'est-ce pas ?

```
def Root(a,n) :
    r=1
    for i in range(1,n+1) :
        r=...
    return ...
```

2 Ensembles de nombres

2.1 Représentation des nombres sur une droite

Activité 1 *À la règle et au compas uniquement !*

1. *Placer le milieu d'un segment quelconque préalablement tracé puis découper ce segment en quatre.*

EXERCICES

2. *Découper en trois un segment quelconque préalablement tracé.*
3. *Placer les nombres* $4,6$ *puis* $-\frac{3}{7}$ *sur une droite graduée.*
4. *Une unité graphique étant donnée, tracer un segment de longueur* $\sqrt{2}$.
5. *Une unité graphique étant donnée, tracer une courbe de longueur* π. *Essayer ensuite pour un segment.*

Tout nombre nombre positif peut donc être associé à la longueur d'un segment même si pour certains, c'est plus difficile, et l'on sait bien qu'en allant de l'autre « côté », on peut aussi représenter des nombres négatifs. Ainsi, à tout point d'une droite graduée, on peut associer un nombre et à tout nombre, on peut associer un point d'une droite graduée. L'ensemble des *nombres réels* peut être défini comme l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée, que l'on appelle alors la *droite réelle.*

L'ensemble des nombres réels contient tous les nombres que vous connaissez. Il s'appelle ainsi car il existe aussi d'autres nombres, que l'on qualifie d'imaginaires, ayant une surprenante propriété : leur carré est négatif ! Je sens que cela vous titille mais vous ne les étudierez pas avant quelques années alors patientez.

2.2 Différents types de nombres

Activité 2 *Résoudre les équations et le problème suivants.*

(a) $3x - 6 = 0$

(b) $2y + 8 = 0$

(c) $4z + 5 = 0$

(d) $7t - 3 = 0$

(e) *Déterminer le rayon d'un disque d'aire* 4 *?*

Vous avez certainement remarqué qu'il y a différents types de nombres. Il y a des nombres que l'on peut matérialiser avec nos doigts (et ceux de nos voisins), il y en a pour lesquels il faut compter à rebrousse-poil, il y a ceux pour qui une virgule est nécessaire, d'autres ont une barre, certains ont un drôle de $\sqrt{\ }$ devant , sans oublier ceux qui nécessitent d'apprendre l'alphabet grec. Mettons-y un peu d'ordre.

Définition 2 *On désigne par :*

- $\mathbb{N}$, *l'ensemble des entiers naturels :* $0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ 137\ ;\ \dots$
- $\mathbb{Z}$, *l'ensemble des entiers relatifs :*
  $\dots\ ;\ -93\ ;\ \dots\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ 137\ ;\ \dots$
- $\mathbb{D}$, *l'ensemble des nombres décimaux :*
  $2,7\ ;\ -5,896\ ;\ 3,14\ ;\ -7\ ;\ 1,3333\ ;\ 0\ ;\ \dots$
- $\mathbb{Q}$, *l'ensemble des nombres rationnels :* $\frac{4}{3}\ ;\ -\frac{19}{23}\ ;\ 0,5\ ;\ -3\ ;\ \dots$
- $\mathbb{R}$, *l'ensemble des nombres réels :*
  $\sqrt{2}\ ;\ \pi\ ;\ \frac{5}{91}\ ;\ -2\ ;\ 4-\sqrt{7-\pi}\ ;\ 5\ ;\ 3,14\ ;\ \dots$

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Nous justifierons certains de ces exemples dans un chapitre d'arithmétique ultérieur (cf. p. 76).

Remarques :

- Les nombres réels qui ne sont pas des rationnels sont appelés *irrationnels*.
- Les rationnels sont les nombres réels qui sont des quotients de deux entiers.

Ne pas confondre $0,3333$ et $\frac{1}{3}$, ce sont deux nombres différents, tout comme π et $3,14159$.
Une calculatrice ne donne qu'une dizaine de chiffres significatifs au maximum, le dernier étant arrondi. On est donc très « loin » de la valeur exacte du nombre calculé. Même si une telle précision peut sembler suffisante, il ne faut pas penser que l'on a une égalité mais simplement une valeur approchée.
Plus généralement, les rationnels sont précisément les nombres dont le développement décimal est *périodique*, ce qui signifie qu'après un certain rang, la suite des décimales se répète à l'infini.
Par exemple, $\frac{5}{3} = 1,6666... = 1,\underline{6}$ $\quad 29 = 29,000... = 29,\underline{0}$ $\quad \frac{3}{5} = 0,6\underline{0}$
$\frac{7}{11} = 0,\underline{63}$ $\quad \frac{80}{175} = 0,4\underline{571428}$.

- Les décimaux sont des fractions, des rationnels, dont le dénominateur peut s'écrire comme une puissance de 10. Leur développement décimal est *fini* : il se termine par une suite de 0 (ou bien une suite de 9 mais je ne veux pas en discuter ici).

Rappelons quelques écritures décimales exactes usuelles :

$\frac{1}{5} = 0,2 \quad \frac{1}{4} = 0,25 \quad \frac{2}{5} = 0,4 \quad \frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{3}{5} = 0,6 \quad \frac{3}{4} = 0,75 \quad \frac{4}{5} = 0,8$

Il est parfois utile de les utiliser mais pas si souvent car on sait bien mieux diviser par $\frac{3}{5}$ que par $0,6$.

Exercice 8 Pour chacun des nombres suivants, déterminer le plus petit ensemble de nombre auquel il appartient.

$2 \in$	$-5,32 \in$	$\frac{15}{4} \in$	$\frac{3}{5} \in$
$-5 \in$	$7,3444... \in$	$1 - \sqrt{9} \in$	$\dfrac{\frac{33}{\sqrt{16}}}{\frac{33}{2+3\sqrt{4}}} \in$
$\sqrt{11} \in$	$\pi^2 - 5 \in$	$\frac{13}{7} \in$	

Exercice 9 Retrouver les valeurs usuelles à partir de ces valeurs approchées.

1. Un pain au chocolat coûte $\sqrt{2}$€
2. Cet élève mesure $\frac{1977}{1087}$ m.
3. Mon professeur est né en l'an $44{,}44^2$.
4. Cette île paradisiaque est à 17^3 km.
5. Je dors 33,333 % du temps.
6. Ce carré a une diagonale de 41 cm.

2.3 Intervalles

Activité 3 *Représenter sur la droite réelle l'ensemble A de tous les réels compris entre 3 et 7, l'ensemble B des réels x tels que $-5 \leqslant x < 2$, l'ensemble C des réels positifs ou nuls, l'ensemble D des réels x tels que $x < -4$, l'ensemble E des entiers compris entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{9}{2}$ et l'ensemble F des rationnels compris entre $-\sqrt{7}$ et $3 + \sqrt{2}$.*

Sur une droite graduée, un intervalle de $\mathbb{R}$ correspond à un segment ou à une demi-droite ou à la droite en entier. Ce sont les parties « sans trou », d'un seul tenant de cette droite. On dit que ce sont les parties *connexes* de $\mathbb{R}$. Il faut être précautionneux aux bornes de l'intervalle : elles peuvent être incluses ou non, elles peuvent aussi être infinies (et dans ce cas, non incluses), notées alors $-\infty$ ou $+\infty$.

Définition 3 *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.*

L'intervalle noté	*est l'ensemble des réels x tels que*	*Il est représenté sur la droite réelle par*
$[\,a\,;b\,]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]\,a\,;b\,[$	$a < x < b$	
$[\,a\,;b\,[$	$a \leqslant x < b$	
$]\,a\,;b\,]$	$a < x \leqslant b$	
$[\,a\,;+\infty\,[$	$a \leqslant x$	
$]\,a\,;+\infty\,[$	$a < x$	
$]\,-\infty\,;b\,]$	$x \leqslant b$	
$]\,-\infty\,;b\,[$	$x < b$	

L'intervalle $[\,a\,;b\,]$ est dit « fermé », $]\,a\,;b\,[$ est dit « ouvert » et $[\,a\,;b\,[$ est dit « fermé en a, ouvert en b ».

Exemples : $[\,-3\,;7\,] = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leqslant x \leqslant 7\}$, $]\,0\,;34\,] = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leqslant 34\}$,
$]\,-4\,;+\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} / -4 < x\}$, $\{x \in \mathbb{R} / x \geqslant -5\} = [\,-5\,;+\infty\,[$,
$\mathbb{R} =]\,-\infty\,;+\infty\,[$.

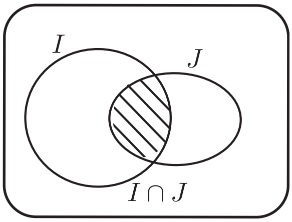
Exercice 10

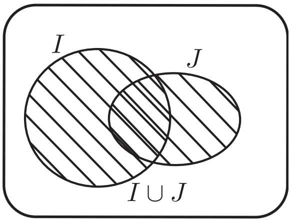
1. Sur une droite graduée, on note $d\,(\,a\,;\,b\,)$ la distance entre le point d'abscisse a et celui d'abscisse b. Calculer les distances suivantes : $d\,(\,3\,;\,5\,)$, $d\,(\,9\,;\,2\,)$, $d\,(\,2\,;\,9\,)$, $d\,(\,5\,;\,-4\,)$, $d\,(\,-1\,;\,-3\,)$, $d\,(\,-6\,;\,2\,)$, $d\,(\,-7\,;\,-3\,)$, $d\,(\,73\,;\,-46\,)$, $d\,(\,-87\,;\,75\,)$.
2. Exprimer sous forme d'intervalle les ensembles suivants.
   $J_1 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, d\,(\,x\,;\,9\,) \leqslant 2\}$, $J_2 = \{d\,(\,x\,;\,-4\,) \leqslant 5\}$, $J_3 = \{d\,(\,x\,;\,1\,) < 7\}$, $J_4 = \{d\,(\,x\,;\,-2\,) < 3\}$.
3. Représenter les intervalles suivants, préciser leur centre puis les caractériser en termes de distance.
   $I_1 = [\,3\,;11\,]$, $I_2 = [\,8\,;14\,]$, $I_3 = [\,-7\,;-3\,]$, $I_4 =]\,-9\,;3\,[$, $I_5 =]\,-5\,;2\,[$.

On retiendra que pour tous réels a et b, $d\,(\,a\,;\,b\,) = d\,(\,b\,;\,a\,)$
et $d\,(\,a\,;\,b\,) = \max\,(\,a\,;\,b\,) - \min\,(\,a\,;\,b\,)$, « le plus grand moins le plus petit ».

2.4 Réunion et intersection d'ensembles

Définition 4 *Soient I et J deux ensembles.*
*L'**intersection** de I et de J, notée $\boldsymbol{I \cap J}$ et lue « inter », est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à I **et** à J :* $x \in I \cap J \iff x \in I$ **et** $x \in J$.
*La **réunion** de I et de J, notée $\boldsymbol{I \cup J}$ et lue « union », est l'ensemble des éléments appartenant à I **ou** à J :* $x \in I \cup J \iff x \in I$ **ou** $x \in J$.





Attention, c'est un « ou » inclusif : l'un ou l'autre ou les deux.

Le sens usuel lui est exclusif : soit l'un, soit l'autre mais pas les deux.

Exemples :

- $[-3\,;5] \cap [1\,;8] = [1\,;5]$
- $[-3\,;5] \cup [1\,;8] = [-3\,;8]$
- $]4\,;11] \cap]2\,;9[=]4\,;9[$
- $]4\,;11] \cup]2\,;9[=]2\,;11]$
- $]-\infty\,;4] \cap]-3\,;+\infty[=]-3\,;4]$
- $]-\infty\,;4] \cup]-3\,;+\infty[= \mathbb{R}$
- $]-\infty\,;6] \cap [6\,;21[= \{6\}$
- $]-\infty\,;6] \cup [6\,;21[=]-\infty\,;21[$
- $]5\,;9] \cap [6\,;8[= [6\,;8[$
- $]5\,;9] \cup [6\,;8[=]5\,;9]$
- $]-\infty\,;3] \cap [5\,;7[= \varnothing$
- $]-\infty\,;3] \cup [5\,;7[=]-\infty\,;3] \cup [5\,;7[$

Notation On notera souvent par une étoile (*) le fait d'omettre 0 dans les ensembles de nombres : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$ et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Exercice 11 Les nombres indiqués appartiennent-ils aux ensembles proposés ?

	$[-3\,;5[$	$]0\,;+\infty[$	$]-\infty\,;-\frac{4}{3}]$	$]-7\,;2] \cup [4\,;9[$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
0						
2						
$11,5$						
5						
-3						
$-4\sqrt{2}$						
$-17,36$						
π						

Exercice 12 Donner un encadrement par des nombres décimaux de l'amplitude précisée.

(a) $\sqrt{2}$, d'amplitude 10^{-2}
(b) π, d'amplitude 10^{-3}
(c) $\frac{5}{3}$, d'amplitude 10^{-5}
(d) $\frac{5}{4}$, d'amplitude 10^{-1}

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et noter l'ensemble solution sous la forme d'un intervalle.

(a) $x - 3 \geqslant 0$
(b) $x + 2 \leqslant 0$
(c) $7t > 3$
(d) $-4y < 3$
(e) $-5t \geqslant -2$
(f) $2x + 10 \leqslant 0$
(g) $5 - x > 0$
(h) $-3x + 2 \geqslant 0$
(i) $7 - 2y \leqslant 0$
(j) $6t > 0$
(k) $-4u \leqslant 0$
(l) $2y + 3 < 1$
(m) $2 - 3x \geqslant -7$
(n) $5 + 4y \leqslant 2$
(o) $4x - 5 > -7 - 2x$
(p) $-2t + 4 < -7t - 3$
(q) $x + 3 \leqslant 2x - 1$
(r) $5x + 9 < 3x + 4$
(s) $3x - 5 \geqslant 8x + 3$
(t) $7x \geqslant x - 8$

3 Valeur absolue

Nous savons bien que pour placer le nombre 3 sur une droite graduée, nous comptons trois unités graphiques à partir de l'origine du côté positif et que pour placer le nombre -5, nous en comptons cinq du côté négatif cette fois. Formalisons cette notion de *distance à zéro*, que l'on nomme *valeur absolue*.

Définition 5 *Pour tout réel a, on définit la valeur absolue de a, notée $|a|$, par*
$$|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Exemples :
◦ $|5| = 5$, ◦ $|-7| = 7$, ◦ $|-2,3| = 2,3$, ◦ $\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$, ◦ $\left|\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3}$, ◦ $|0| = 0$.

Remarques :
- On a $|-4| = 4 = |4|$, $|8| = 8 = |-8|$,... Ainsi, on a toujours $\boldsymbol{|-a| = |a|}$.
- On a $\sqrt{7^2} = 7$, $\sqrt{(-3)^2} = 3$, $\sqrt{0^2} = 0$,... Ainsi, on a toujours $\boldsymbol{\sqrt{a^2} = |a|}$.

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

(a) $\|x\| = 11$	(d) $\|z + 4\| = 3$	(g) $2\,\|x - 5\| \leqslant 8$
(b) $\|y\| = -3$	(e) $\|x\| \leqslant 7$	
(c) $\|x - 2\| = 5$	(f) $\|7 - y\| < 10$	(h) $3\,\|4 - 2x\| < 6$

On a vu à l'exercice 10 que si nous voulons déterminer la distance entre 61 et 48, il suffit de calculer $61 - 48$. Pour déterminer la distance, entre 13 et 27, nous calculons $27 - 13$ et non $13 - 27$. En effet, la distance entre deux nombres se doit d'être positive. Pour déterminer la distance entre deux réels a et b, il faut donc calculer $a - b$ ou $b - a$ suivant le signe de cette différence. Mais quelle est donc la notion qui nous permet de nous affranchir du signe ? La valeur absolue, pardi !

Propriété 4
La distance entre deux réels a et b est la valeur absolue de leur différence :
$d\,(\,a\,;\,b\,) = |b - a| = |a - b|$.

Exemples :
◦ $d\,(\,-8\,;\,0\,) = |-8 - 0| = 8$ et l'on retrouve la notion de *distance à zéro* de la valeur absolue,
◦ $d\,(\,5\,;\,12\,) = |5 - 12| = |-7| = 7$,
◦ $d\,(\,4\,;\,-3\,) = |4 - (-3)| = |4 + 3| = 7$,
◦ $d\,(\,-13\,;\,-6\,) = |-13 - (-6)| = |13 + 6| = 7$,
◦ $d\left(1\,;\,\sqrt{2}\right) = \left|1 - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - 1$.

Étudions à présent l'équation $|x - 5| = 3$. Un tel réel x est donc à distance trois du nombre 5. Ce ne peut donc qu'être que 2 ou 8. De même, $|x - 4| = 6$ correspond à un réel x à distance six du nombre 4 : c'est donc -2 ou 10.

En y regardant de plus près, on se rend compte que l'inéquation $|x - 5| \leqslant 3$ correspond alors aux réels à distance inférieure ou égale à trois du nombre 5. Ce sont donc les réels compris entre 2 et 8. De même, $|x - 4| < 6$ correspond aux réels à