Sujet n° 1

Banque commune École Polytechnique - InterENS filière PSI 2017

L'énoncé

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

— Pour toute fonction f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et tout entier $n \geqslant 1$, on note $f^{(n)}$ la fonction dérivée n-ème de f sur cet intervalle (quand cette dérivée n-ème existe).
Ainsi, $f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$, etc. On convient que $f^{(0)} = f$.

— Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times \ldots \times n$ la factorielle de n. On convient que $0! = 1$.

— Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes. On pose $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, et on note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Le déterminant d'une matrice carrée $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sera noté $\det(A)$. Sa transposée est notée ${}^{t}A = [a_{j,i}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Lorsque $A = [a_{1,1}] \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ on identifie A au réel $a_{1,1}$.

— On note $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales associées seront notés identiquement. Ainsi, si par exemple $P \in \mathbb{R}[X]$ désigne un polynôme, alors la fonction polynomiale associée sera aussi notée P.

— Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E, on note 0_E l'élément nul de E, et on note Id_E l'application identité de E dans lui-même. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Si $L \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme de E et $n \geqslant 2$ un entier naturel, on note L^n l'application composée de L avec lui-même n fois : $L^n = L \circ L \circ \ldots \circ L$ (n fois). Par convention $L^0 = \mathrm{Id}_E$ et $L^1 = L$. Le noyau et l'image de L seront notés respectivement $\ker L$ et $\operatorname{im} L$.

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, on note $F_1 + F_2$ la somme de ces deux sous-espaces. On écrira $F_1 \oplus F_2$ pour signifier que cette somme est directe. Si, de plus, E est muni d'un produit scalaire, on écrira $F_1 \oplus^{\perp} F_2$ pour signifier que la somme est orthogonale, c'est-à-dire que F_1 et F_2 sont orthogonaux entre eux. L'orthogonal d'un espace sous-espace vectoriel F de E sera noté $F^{\perp}$. On notera $\dim(F)$ la dimension de F.

Partie I

Soit $m \geqslant 2$ un entier naturel et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2m+1$. Cet espace est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Soient T et M deux endomorphismes de E vérifiant les hypothèses suivantes :

(H1) $T^{2m} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $T^{2m+1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

(H2) $M^2 = \mathrm{Id}_E$.

(H3) $\forall (v, w) \in E^2, \quad \langle M(v) \mid w \rangle = \langle v \mid M(w) \rangle$.

(H4) $T \circ M + M \circ T = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

On pose dans la suite

$$F^+ = \ker(M - \mathrm{Id}_E), \quad F^- = \ker(M + \mathrm{Id}_E).$$

On considère l'application S de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (v, w) \in E^2, \quad S(v, w) = \langle v \mid T(w) \rangle + \langle T(v) \mid w \rangle,$$

et on note G l'ensemble des éléments $u \in E$ vérifiant les deux propriétés :

(a) $u \in \mathrm{im}(T)$,

(b) $\forall v \in E, \quad S(u, v) = 0$.

1. Pour tout vecteur $v \in E$, on pose

$$v^+ = v + M(v), \quad v^- = v - M(v).$$

   (a) Montrer que : $\forall v \in E$, $v^+ \in F^+$ et $v^- \in F^-$.

   (b) Montrer que $E = F^+ \oplus^\perp F^-$.

   (c) Montrer que : $\forall v \in F^+, T(v) \in F^-$ et que $\forall v \in F^-, T(v) \in F^+$.
   En déduire que F^+ et F^- sont stables par T^2.

2. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, 2m\}$, $\mathrm{im}(T^{k+1}) \subset \mathrm{im}(T^k)$ et $\mathrm{im}(T^{k+1}) \neq \mathrm{im}(T^k)$.

3. En déduire que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, 2m+1\}$, on a

$$\dim(\mathrm{im}\, T^k) = 2m + 1 - k, \quad \dim(\ker T^k) = k.$$

4. En déduire aussi que $\mathrm{im}\, T^k = \ker T^{2m+1-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2m+1$.

5. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}$ et $z \in \left(\mathrm{im}\, T^k\right)^\perp \cap \left(\mathrm{im}\, T^{k-1}\right)$ tel que $z \neq 0_E$. Après avoir justifié l'existence d'un tel vecteur z, montrer que $T^{2m+1-k}(z) \neq 0_E$.

6. Montrer que pour tout nombre réel α, l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E + \alpha T^2$ est bijectif et que

$$(\mathrm{Id}_E + \alpha T^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \alpha^k T^{2k},$$

   où $(\mathrm{Id}_E + \alpha T^2)^{-1}$ désigne l'endomorphisme inverse de $\mathrm{Id}_E + \alpha T^2$.

7. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et que $G \cap \ker(T) = \{0_E\}$.

8. En déduire que l'application $(v, w) \in G \times G \mapsto \langle T(v) \mid T(w) \rangle$ est un produit scalaire sur G.

9. Soit $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que $M \circ T^k = (-1)^k T^k \circ M$.

   (b) En déduire que $\mathrm{im}\, T^k$ et $\ker T^k$ sont stables par M.

10. Montrer que l'une des deux assertions suivantes est vraie : (i) $\ker T \subset F^+$ (ii) $\ker T \subset F^-$.
11. On suppose ici que $\ker(T) \subset F^+$.
    (a) Montrer que : $\forall z \in F^-$, $T^{2m}(z) = 0_E$.
    (b) Montrer que $\left(\operatorname{im} T\right)^\perp \subset F^+$ et que $\left(\operatorname{im} T^2\right)^\perp \cap \operatorname{im} T \subset F^-$.
    (c) Soit $z \in \left(\operatorname{im} T\right)^\perp$ avec $z \neq 0_E$. Montrer que $T(z) \in G^+$ et que $T(z) \neq 0_E$.
    (d) Soit $z \in \left(\operatorname{im} T^2\right)^\perp \cap (\operatorname{im} T)$ avec $z \neq 0_E$. Montrer que $T(z) \in G^+$ et que $T(z) \neq 0_E$.
12. On dit désormais qu'un couple $(w_1, w_2) \in E \times E$ est une *paire caractérisante de* G si w_1 et w_2 vérifient les trois propriétés :
    (A) $w_1 \in F^+$, $T(w_1) \in G^\perp$ et $T(w_1) \neq 0_E$,
    (B) $w_2 \in F^-$, $T(w_2) \in G^\perp$ et $T(w_2) \neq 0_E$,
    (C) $w_i \in \left(\operatorname{im} T^2\right)^\perp$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

    Déduire des questions précédentes l'existence d'une paire caractéristique de G.
13. En déduire que $\dim(G) \leqslant 2m - 2$.
14. On suppose maintenant que G vérifie l'hypothèse suivante :

$$\textbf{(H5)}\ \dim(G) = 2m - 2.$$

    Montrer que si (w_1, w_2) est une paire caractérisante de G alors $\big(T(w_1), T(w_2)\big)$ constitue une base de $G^\perp$.

Partie II

On conserve toutes les notations de la partie I et on suppose que les hypothèses (H1), (H2), (H3), (H4) et (H5) sont toutes satisfaites. Soit (w_1, w_2) une paire caractérisante de G (c'est-à-dire vérifiant les propriétés (A), (B) et (C) de la question 12).
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le problème suivant, noté $(\mathscr{P}_\lambda)$:

$$\textit{Trouver } u \in G \textit{ tel que}: \quad \forall v \in G,\ \langle u \mid v\rangle - \lambda\langle T(u) \mid T(v)\rangle = 0 \qquad (\mathscr{P}_\lambda)$$

et on note H_λ l'ensemble des solutions u de ce problème. On montre facilement que H_λ est un sous-espace vectoriel de G.

15. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
    (a) Montrer que si $(\mathscr{P}_\lambda)$ admet une solution $u \neq 0_E$, alors nécessairement $\lambda > 0$.
    (b) Soit $u \in G$. Montrer que u est solution de $(\mathscr{P}_\lambda)$ si et seulement si :
    $$(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)(u) \in G^\perp.$$
    En déduire qu'il existe deux nombres réels α et β tels que :
    $$u = \alpha(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_1) + \beta(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_2).$$
    (c) Montrer que le problème $(\mathscr{P}_\lambda)$ admet une solution non nulle si et seulement si
    $$Q_1(\lambda).Q_2(\lambda) = 0,$$
    où pour $i \in \{1, 2\}$, Q_i est le polynôme
    $$Q_i(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \langle T^{2k+1}(w_i) \mid T(w_i)\rangle X^k.$$
    (d) Supposons que λ est racine réelle du polynôme produit Q_1Q_2. Montrer que $\dim(H_\lambda) = 2$ si λ est racine commune de Q_1 et de Q_2, et $\dim(H_\lambda) = 1$ sinon.
    (e) Montrer que
    $$Q_i(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k S\big(w_i, T^{2k+1}(w_i)\big) X^k, \quad \text{pour } i = 1 \text{ ou } i = 2.$$

16. Soit $\mathscr{B} = (z_1, \ldots, z_\ell)$, où $\ell = 2m - 2$, une base de G. Pour tout élément u de G, on note U (lettre majuscule) le vecteur colonne comportant les coordonnées de u relativement à la base $\mathscr{B}$. On note $A = [a_{i,j}]_{1\leqslant i,j\leqslant \ell}$ et $B = [b_{i,j}]_{1\leqslant i,j\leqslant \ell}$ les deux matrices carrées dont les coefficients sont définis par
    $$a_{i,j} = \langle z_i \mid z_j\rangle,\ b_{i,j} = \langle T(z_i) \mid T(z_j)\rangle \text{ pour } 1 \leqslant i, j \leqslant \ell.$$
    (a) Soient u et v deux éléments de G. Montrer que
    $$\langle u \mid v\rangle = {}^{\mathrm{t}}UAV, \quad \langle T(u) \mid T(v)\rangle = {}^{\mathrm{t}}UBV,$$
    et en déduire que A et B sont inversibles.
    (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'un élément $u \in G$ est solution de $(\mathscr{P}_\lambda)$ si et seulement si
    $$(A - \lambda B)U = 0.$$
    En déduire que $(\mathscr{P}_\lambda)$ admet une solution non nulle si et seulement si $\det(A - \lambda B) = 0$.

(c) On définit la fonction ψ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = \frac{\det(A - tB)}{\det B}.$$

Montrer que cette fonction ψ est indépendante du choix de la base $\mathscr{B}$.

(d) Justifier pourquoi on peut choisir la base $\mathscr{B}$ de sorte que $B = I_\ell$. En déduire que ψ est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.

(e) Montrer que la polynôme ψ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et que ses racines sont soit simples soit doubles.

(f) Montrer que

$$\phi(X) = \frac{1}{S(w_1, T^{2m-1}(w_1))S(w_2, T^{2m-1}(w_2))} Q_1(X)Q_2(X).$$

(on justifiera pourquoi nécessairement $S(w_i, T^{2m-1}(w_i)) \neq 0$ pour $i = 1$ et $i = 2$).
En déduire que Q_1 et Q_2 sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$ et à racines simples.

Partie III

On conserve ici les notations des parties I et II et on se place dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}_{2m}[X]$, avec $m \geqslant 2$ un entier naturel fixé. Cet espace vectoriel est muni du produit scalaire :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

Désormais les deux endomorphismes T et M de E seront définis par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2m}[X], \quad T(P) = P' \quad et \quad M(P) = P^\star,$$

où $P^\star(X) = P(-X)$.
On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{R}_k^0[X] = \{P \in \mathbb{R}_k[X] \mid P(-1) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}.$$

17. Montrer que T et M vérifient bien les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4).
18. Quels sont les espaces F^+ et F^- dans ce cas ?
19. Montrer que
$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad S(P,Q) = P(1)Q(1) - P(-1)Q(-1).$$
20. Déterminer le sous-espace G. L'hypothèse (H5) est-elle satisfaite ?
21. On définit pour tout entier naturel n le polynôme R_n comme suit
$$R_n(X) = (X^2 - 1)^n,$$
et on pose désormais
$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} R_n^{(n)}(X).$$
Soit $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Quel est le degré du polynôme L_n ? Exprimer $M(L_n)$ en fonction de L_n.
    (b) Montrer que si $n \geqslant 1$ alors
    $$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \langle L_n, P \rangle = 0.$$
    (c) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a
    $$L_n^{(k)}(1) = \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{1}{k! 2^k}.$$
    (d) Montrer que pour tout entier naturel k, on a
    $$S(L_n, L_n^{(2k+1)}) = 2L_n^{(2k+1)}(1).$$
22. Montrer que la couple (L_{2m}, L_{2m-1}) est une paire caractérisante de G.
23. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le problème : *trouver* $P \in \mathbb{R}_{2m-1}^0[X]$ *tel que*
$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2m-1}^0[X], \quad \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t - \lambda \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t = 0.$$
Montrer que ce problème admet une solution P non identiquement nulle si et seulement si λ est racine du polynôme
$$K(X) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k L_{2m-1}^{(2k+1)}(1) X^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k L_{2m}^{(2k+1)}(1) X^k \right).$$

24. Montrer que
$$\forall P \in \mathbb{R}^0_{2m-1}[X], \quad \langle P, P \rangle \leqslant 4\langle P', P' \rangle,$$
avec inégalité stricte si P est non nul.

25. En déduire que les racines de K sont toutes réelles et appartiennent à l'intervalle $]0, 4[$.

26. Soit $(P_1, \ldots, P_{2m-2})$ une base quelconque de G. On considère les deux matrices carrées $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant 2m-2}$ et $B = [b_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant 2m-2}$ définies par
$$a_{i,j} = \langle P_i, P_j \rangle, \quad b_{i,j} = \langle P'_i, P'_j \rangle \quad \text{pour } 1 \leqslant i, j \leqslant 2m-2.$$
Déterminer le rapport
$$\frac{\det(A)}{\det(B)}$$
en fonction de m.