Chapitre 1

Les nombres

1 Entiers

Addition et multiplication

• L'**addition** permet de savoir combien on obtient quand on **réunit** deux quantités séparées. Si j'avais 7 billes, et que j'en ai gagné 3, j'en ai maintenant

$$7 + 3 = 10$$

• La **multiplication** permet de savoir combien on obtient quand on **ajoute plusieurs fois** le même nombre. Si j'ai 3 sacs contenant chacun 7 billes, mon nombre de billes est

$$7 + 7 + 7 = 3 \times 7 = 21$$

• Ne pas confondre

$$7+0 = 0+7 = 7 \qquad 7\times 0 = 0\times 7 = 0 \qquad 7+1 = 1+7 = 8 \qquad 7\times 1 = 1\times 7 = 7$$

• Pour n'importe quel nombre a, on a toujours :

$$\boxed{a + 0 = a} \qquad \boxed{0 + a = a}$$

autrement dit, **ajouter** 0 **ne change pas** la valeur.

• Pour n'importe quel nombre a, on a toujours :

$$\boxed{a \times 1 = a} \qquad \boxed{1 \times a = a}$$

autrement dit, **multiplier par** 1 **ne change pas** la valeur.

Multiplications par 10 ou 100

• On veut faire une **multiplication par 10**, par exemple, multiplier 3 par 10 ou 10 par 3. On procède ainsi :

$$\begin{aligned} 3 \times 10 &= 10 + 10 + 10 \\ &= 30 \end{aligned}$$

> Pour multiplier un entier par 10 **on met un 0 à sa droite**

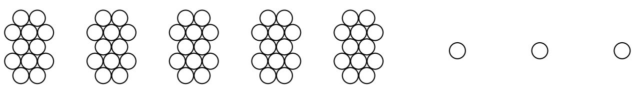
• Pour faire maintenant une **multiplication par 100**, par exemple, multiplier 5 par 100 ou 100 par 5, on fait :

$$\begin{aligned} 5 \times 100 &= 100 + 100 + 100 + 100 + 100 \\ &= 500 \end{aligned}$$

> Pour multiplier un entier par 100 **on met deux 0 à sa droite**

Division

• Quand on divise 63 par 5, la division ne tombe pas juste : le quotient est 12 et il reste 3. Ce qui revient à dire que l'on ne peut pas partager exactement 63 en 5 parts égales : on peut faire **5 parts égales**, mais il y a **en plus un reste** qui vaut **3** :



$$\begin{array}{r|l} 63 & 5 \\ \cline{2-2} 13 & 12 \\ 3 & \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 63 &= 5 \times 12 + 3 \\ &= 60 + 3 \end{aligned}$$

• Dans le cas général, si la **division** de a par b donne un **quotient** q et un **reste** r qui peut être nul ou pas, on a toujours l'**égalité de division** suivante :

$$\boxed{a = b \times q + r}$$

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

ce qui signifie (*voir* § 4, p. 66) qu'on obtient $\boxed{a}$ en faisant :

- d'abord la multiplication $\boxed{b \times q}$
- puis l'addition $\boxed{+\, r}$

Diviseurs d'un entier

On peut partager l'entier 10 en parts égales de quatre façons possibles :

$$\begin{aligned} 10 &= \boxed{* * * * * * * * * *} = 1 \times 10 \\ &= \boxed{* * * * *}\ \boxed{* * * * *} = 2 \times 5 \\ &= \boxed{* *}\ \boxed{* *}\ \boxed{* *}\ \boxed{* *}\ \boxed{* *} = 5 \times 2 \\ &= \boxed{*}\ \boxed{*}\ \boxed{*}\ \boxed{*}\ \boxed{*}\ \boxed{*}\ \boxed{*}\ \boxed{*}\ \boxed{*}\ \boxed{*} = 10 \times 1 \end{aligned}$$

On dit que les nombres : 1 2 5 10 sont les **diviseurs** de 10. On dit aussi que 10 est **divisible** par 1, 2, 5, 10.

Définition 2. *On dit qu'un entier a est* ***divisible*** *par un entier b si la division de a par b tombe juste, ce qui revient à dire qu'il existe un entier q tel que :*

$$a = b \times q$$

ce qui correspond à la division suivante :

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} 0 & q \end{array}$$

Définition 3. *Si a est divisible par b, on dit que b est un* ***diviseur*** *de a, et que a est un* ***multiple*** *de b.*

Proposition 4. *Les multiples de b sont :* $b \quad 2b \quad 3b \quad 4b \quad 5b \quad 6b \quad \dots$

Proposition 5. (critères de divisibilité)
- *Un entier est divisible par 2* ***si et seulement si****, son chiffre des unités est 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8.*
- *Un entier est divisible par 3,* ***si et seulement si****, la somme de ses chiffres est divisible par 3.*
- *Un entier est divisible par 5,* ***si et seulement si****, son chiffre des unités est 0 ou 5.*

Par exemple, le nombre 226 est divisible par 2, mais il n'est divisible ni par 3 ni par 5.

Définition 6. *Un entier qui est divisible par 2 est appelé* ***nombre pair****. Les autres entiers sont dits* ***impairs****.*

Les nombres pairs sont donc : 0 2 4 6 8 10 12 etc. Il y en a une **infinité**. Les impairs sont : 1 3 5 7 9 11 13 etc. Il y en a aussi une infinité.

2 Décimaux

Le nombre $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$ est décimal, mais $\dfrac{1}{3} = 0{,}333...$ n'est pas décimal car **la division de 1 par 3 ne s'arrête pas**.

$$18{,}4$$

1 dizaine — 8 unités — 4 dixièmes

Ajouter ou retrancher 1, 10, 100

Pour ajouter 1 à un décimal on ajoute 1 à son chiffre des **unités**

Pour retrancher 1 à un décimal on retranche 1 à son chiffre des **unités**

$$\mathbf{4}{,}2 + 1 = \mathbf{5}{,}2 \quad \text{et} \quad \mathbf{4}{,}2 - 1 = \mathbf{3}{,}2$$

Pour ajouter 10 à un décimal on ajoute 1 à son chiffre des **dizaines**

Pour retrancher 10 à un décimal on retranche 1 à son chiffre des **dizaines**

$$\mathbf{3}4{,}2 + 10 = \mathbf{4}4{,}2 \qquad \mathbf{2}7{,}3 - 10 = \mathbf{1}7{,}3$$

Le décimal 3,6 n'a pas de chiffre des dizaines : c'est comme si il avait 0 dizaine. On écrit :

$$3{,}6 = \mathbf{0}3{,}6 \qquad \text{et donc} \qquad 3{,}6 + 10 = \mathbf{0}3{,}6 + 10 \ = \ \mathbf{1}3{,}6$$

Pour ajouter 100 à un décimal on ajoute 1 à son chiffre des **centaines**

Pour retrancher 100 à un décimal on retranche 1 à son chiffre des **centaines**

$$\mathbf{3}10{,}5 + 100 = \mathbf{4}10{,}5 \qquad \mathbf{4}53{,}9 - 100 = \mathbf{3}53{,}9 \qquad \mathbf{1}95{,}8 - 100 = 95{,}8$$

Multiplier ou diviser par 10, 100, 1000

Proposition 1. *Pour **multiplier** un décimal par 10, on déplace sa virgule de 1 cran vers la **droite**.*
*Pour **diviser** un décimal par 10, on déplace sa virgule de 1 cran vers la **gauche**.*

Proposition 2. *Pour **multiplier** un décimal par 100, on déplace sa virgule de 2 crans vers la **droite**. Pour **diviser** un décimal par 100, on déplace sa virgule de 2 crans vers la **gauche**.*

Proposition 3. *Pour **multiplier** un décimal par 1000, on déplace sa virgule de 3 crans vers la **droite**. Pour **diviser** un décimal par 1000, on déplace sa virgule de 3 crans vers la **gauche**.*

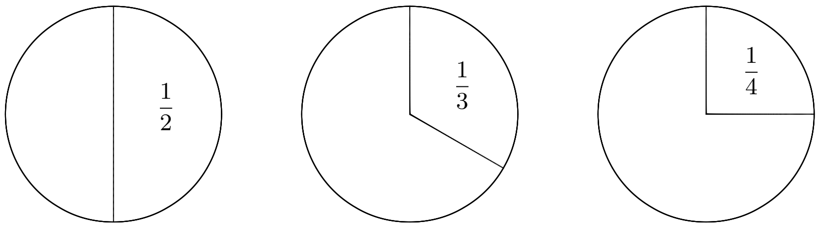
3 Fractions

Dans la **fraction** $\frac{a}{b}$, le nombre $\boxed{a}$ est appelé numérateur, le nombre $\boxed{b}$ est appelé dénominateur. Une fraction est un **nombre** qui peut être :

entier : $\frac{4}{2} = 2$ décimal : $\frac{3}{2} = 1{,}5$ ni entier ni décimal : $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$

Exemples

Suivant que l'on coupe un gâteau en 2, en 3 ou en 4, on obtient des parts **de plus en plus petites** comme on le voit sur la figure :



On a donc la relation suivante :

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

plus **le dénominateur est grand**, plus **la fraction est petite**

Calcul sur les fractions

Proposition 1.

$a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ $a \times \frac{c}{b} = \frac{a \times c}{b}$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Simplification des fractions

Proposition 2.

$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$ $\frac{c \times a}{c \times b} = \frac{a}{b}$ $\frac{a}{a} = 1$ $\frac{a}{1} = a$

Simplifier une fraction c'est donc l'écrire avec des nombres plus petits :

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \times 1}{3 \times 2} = \frac{\cancel{3} \times 1}{\cancel{3} \times 2} = \frac{1}{2}$$

Exemples de calculs et de simplifications :

$$2 \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5} \qquad 2 \times \frac{3}{8} = \frac{2 \times 3}{8} = \frac{2 \times 3}{2 \times 4} = \frac{\cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times 4} = \frac{3}{4}$$

$$3 \times \frac{4}{9} = \frac{3 \times 4}{9} = \frac{3 \times 4}{3 \times 3} = \frac{\cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times 3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{15}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{15 \times 7}{2 \times 5} = \frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 5} = \frac{3 \times 7}{2} = \frac{21}{2} \qquad \frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{3+7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{2 \times 5}{2 \times 4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{3} \times 4 = \frac{1 \times 4}{3} = \frac{4}{3} \qquad 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4 \times 1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3} = 1{,}33333... \approx 1{,}3 \qquad \frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2 \times 5} = \frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Comparaison des fractions et des décimaux

• Les règles de calculs sur les fractions sont commodes pour faire des produits. Ainsi :

$$\frac{1}{5} \times \frac{35}{3} = \frac{35}{5 \times 3} = \frac{5 \times 7}{5 \times 3} = \frac{7}{3}$$

qui peut aussi se calculer par :

$$\frac{1}{5} \times \frac{35}{3} = 0{,}2 \times \frac{35}{3} = \frac{0{,}2 \times 35}{3} = \frac{7}{3}$$

• Par contre, le calcul suivant :

$$\frac{1}{7} \times \frac{35}{3} = \frac{35}{7 \times 3} = \frac{7 \times 5}{7 \times 3} = \frac{5}{3}$$

qui se fait aisément avec les règles de calcul sur les fractions, **ne peut pas se faire directement et exactement avec des décimaux** car ni $\frac{1}{7}$ ni $\frac{35}{3}$ ne sont décimaux :

$$\frac{1}{7} = 0{,}\boxed{14\,28\,57}\,14\,28\,57\,14\,28\,57... \qquad \frac{35}{3} = 12{,}\boxed{3}33...$$

où on a encadré la partie des décimales qui se répètent ; la division ne s'arrête jamais.

• Les décimaux sont commodes pour faire des **sommes** ou calculer des **valeurs approchées**. Ils sont généralement peu commodes pour faire des multiplications.

Dans la vie courante, quand on veut tracer des figures de façon précise avec un double décimètre, ou découper du papier, du tissu, du bois, etc. on utilise les **nombres décimaux**.

4 Exercices de révision sur les nombres

Exercice 1.

Effectuez les opérations suivantes :

1. $709{,}86 + 34 =$	**2.** $128{,}4 + 72{,}95 =$	**3.** $30 + 148{,}75 =$
$576 + 57{,}6 =$	$32{,}5 - 0{,}01 =$	$1{,}0007 - 0{,}1089 =$
$1\,591 - 17{,}92 =$	$1{,}07 - 0{,}109 =$	$46{,}78 - 3{,}9 =$
$634{,}63 - 192 =$	$23{,}02 + 30{,}2 =$	$46{,}08 - 3{,}009 =$

Exercice 2.

Effectuez les opérations suivantes :

1. $3{,}5 \times 2{,}05 =$	**2.** $38{,}5 \times 0{,}056 =$	**3.** $0{,}5 \times 0{,}05 =$
$53{,}8 \times 20{,}5 =$	$50{,}8 \times 20{,}5 =$	$3{,}8 \times 0{,}25 =$
$3{,}5 \times 7\,000 =$	$30{,}5 \times 70 =$	$3{,}51 \times 70 =$
$3{,}57 \times 0{,}7 =$	$3{,}2 \times 60{,}5 =$	$30{,}07 \times 0{,}07 =$

Exercice 3.

Effectuez les divisions suivantes : poussez **deux chiffres après la virgule** celles qui ne tombent pas juste :

1. $\frac{156}{25} =$	**2.** $\frac{343}{27} =$	**3.** $\frac{525}{54} =$
$\frac{192}{11} =$	$\frac{102}{31} =$	$\frac{249}{16} =$
$\frac{166}{29} =$	$\frac{209}{56} =$	$\frac{307}{52} =$
$\frac{288}{9} =$	$\frac{317}{27} =$	$\frac{485}{9} =$

Exercice 4.

Effectuez les divisions suivantes au-delà de la virgule jusqu'à ce qu'elles **tombent juste** ou jusqu'à ce que vous trouviez un **reste identique** à un reste précédent :

$\frac{1}{10} =$ $\qquad$ $\frac{1}{11} =$ $\qquad$ $\frac{1}{12} =$ $\qquad$ $\frac{1}{13} =$

Exercice 5 (résolu partiellement).

On considère les nombres suivants :

$$\begin{aligned} a &= 0{,}9 \times 51{,}3 & d &= 1{,}9 + 5{,}89 \\ b &= 5{,}02 \times 19{,}9 & e &= 15{,}02 - 8{,}9 \\ c &= 10{,}09 \times 95{,}12 & f &= 100{,}09 + 98{,}12 \end{aligned}$$

Sans les calculer exactement, déterminez pour chacun d'eux une valeur approchée.

Solution : On utilise le symbole $\approx$ qui signifie “égal environ”. On a :

$$0{,}9 \approx 1 \quad \text{et} \quad 51{,}3 \approx 50$$

Donc $a \approx 1 \times 50 = 50$. Procéder de même pour b, c, d, e et f.

Exercice 6 (résolu partiellement).

Simplifiez le plus possible les nombres suivants :

$$x = \frac{250 \times 12}{8} \qquad y = \frac{50 \times 3}{25} \qquad z = \frac{8 \times 7}{4} \qquad t = \frac{56 \times 45}{18}$$

Solution partielle : On peut écrire :

$$\begin{aligned} x &= \frac{(125 \times 2) \times (4 \times 3)}{2 \times 4} \\ &= \frac{125 \times \cancel{2} \times \cancel{4} \times 3}{\cancel{2} \times \cancel{4}} \\ &= 125 \times 3 \\ &= 375 \end{aligned}$$

Procédez de façon analogue pour y, z et t.

Exercice 7 (résolu partiellement).

Écrivez sous forme de fractions irréductibles les nombres suivants :

$$a = \frac{4{,}5}{6} \qquad b = \frac{18}{24} \qquad c = \frac{3{,}5}{6} \qquad d = \frac{5}{6{,}5} \qquad e = \frac{2{,}5}{10} \qquad f = \frac{12}{42}$$

Solution partielle : On multiplie par 2 numérateur et dénominateur de a pour obtenir une fraction, puis on simplifie :

$$a = \frac{4{,}5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{9}{12} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{3}{4}$$

On a aussi :

$$b = \frac{6 \times 3}{6 \times 4} = \frac{3}{4}$$

Faites de même pour c, d, e et f.