Chapitre 1

Suites numériques

La notion de limite joue un rôle fondamental en mathématiques car de nombreux résultats sont obtenus par itérations successives ; par exemple, lorsque la solution d'une équation ne s'exprime pas à l'aide des opérations et des fonctions déjà connues, les méthodes numériques permettent d'obtenir une suite de valeurs approchées convergeant vers la solution exacte. On définit en particulier de nombreuses notions nouvelles très utiles pour élargir le champ des mathématiques.

Un mathématicien

Archimède est avec **Euclide** le plus grand mathématicien de l'Antiquité. Il vivait à Syracuse, en Sicile. Sa découverte du principe ou de la poussée d'Archimède est souvent racontée de façon romancée. On sait moins qu'il fut le premier à utiliser des suites convergentes. Pour calculer une valeur approchée du nombre π, il inscrit et circonscrit au cercle des polygones ayant de plus en plus de côtés, jusqu'à 96. Il calcule de même l'aire englobée par un arc de parabole et fait converger une suite géométrique pour obtenir le résultat.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Le mathématicien allemand Lothar **Collatz** est surtout connu pour une conjecture d'aspect anodin qu'il a proposée en 1937. Prenons un entier strictement positif $a_0 > 1$; s'il est pair, on pose $a_1 = a_0/2$ et sinon $a_1 = 3a_0 + 1$. De même, connaissant a_n, s'il est pair on pose $a_{n+1} = a_n/2$ et sinon $a_{n+1} = 3a_n + 1$. La récurrence s'arrête dès qu'on aboutit à 1. La conjecture affirme que, quel que soit l'entier a_0 choisi, on aboutit toujours, en un temps plus ou moins long à 1. Cependant, personne n'a réussi à ce jour à le démontrer et personne, non plus, n'a trouvé un exemple le contredisant.

COMPÉTENCES

les incontournables

- Calculer la limite d'une suite
  - en utilisant les limites des suites classiques (arithmétiques, géométriques ou arithmético-géométriques)
  - avec les théorèmes des opérations sur les limites
  - avec les théorèmes de comparaison
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite
  - à l'aide d'une représentation graphique pour les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$
  - en utilisant une suite auxiliaire classique.

et plus si affinités

- Étudier une suite homographique

Résumé de cours

Généralités sur les suites de nombres réels

Définition : *Une **suite** u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ qui à tout entier naturel associe un réel $u(n)$, noté u_n. Cette suite se note u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou (u_n).*

Vocabulaire : *u_n est appelé **le terme général** de la suite (u_n) ou le terme de rang n ou encore le terme d'indice n. u_0 est appelé **le terme initial** de la suite (u_n).*

Modes de génération

Définition : *Lorsqu'une suite est donnée par son terme général u_n exprimé en fonction de n indépendamment des termes précédents, on dit que la suite est définie **sous forme explicite**.*

Définition : *Lorsqu'une suite est donnée par son premier terme et une relation exprimant chaque terme en fonction du précédent, on dit que la suite est définie par une **relation de récurrence**.*

Suites classiques

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques

Définition : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que*

- *u est **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$, appelée raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$;*
- *u est **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$, appelée raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \cdot u_n$;*
- *u est **arithmético-géométrique** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a \cdot u_n + b$.*

Remarque : les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particuliers de suites arithmético-géométriques.

Proposition 1.1.— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- Si u est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.
- Si u est la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \cdot q^n$.

Proposition 1.2.— Somme des premiers termes d'une suite géométrique —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \, \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème-Définition 1.3.— Étant donné une fonction $f : I \to I$ définie et à valeurs dans un même intervalle I et $a \in I$, il existe une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, unique, telle que $u_0 = a$ et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)}$$

De plus, $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I.

Vocabulaire : *la fonction $f : I \to I$ est appelée la **fonction itératrice**.*

■ Suites possédant une limite

Définition intuitive

Définition : *Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur $\mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que*

- (u_n) ***admet*** ℓ ***pour limite***, *et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, *si les valeurs u_n sont arbitrairement proches de ℓ pourvu que n soit assez grand.*
- (u_n) ***admet*** $+\infty$ ***pour limite***, *et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *si les valeurs u_n sont arbitrairement grandes (proches de $+\infty$) pourvu que n soit assez grand.*
- (u_n) ***admet*** $-\infty$ ***pour limite***, *et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *si les valeurs u_n sont arbitrairement petites (proches de $-\infty$) pourvu que n soit assez grand.*

Lorsqu'elle existe, ***la limite de la suite*** (u_n) ***est unique****.*

Vocabulaire : *lorsque* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, *on dit aussi que (u_n)* ***converge*** *vers ℓ.*

Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \{\pm\infty\}$, *on dit que (u_n)* ***diverge*** *vers $\pm\infty$.*

Opérations sur les suites possédant une limite

Remarque : la connaissance des limites des suites (u_n) et (v_n) ne suffit pas toujours pour déterminer la limite de la somme, du produit ou du quotient. On parle alors de **cas d'indétermination**.

Théorème 1.4.— Opérations sur les limites —.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Le tableau ci-contre indique les valeurs de la limite

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n$$

en fonction des valeurs de ℓ et ℓ'.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell = +\infty$	$\ell = -\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$\ell' = -\infty$	$-\infty$		$-\infty$

Le tableau ci-contre indique les valeurs de la limite

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n$$

en fonction des valeurs de ℓ et ℓ'.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}^\star$	$\ell = 0$	$\ell = \pm\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}^\star$	$\ell \times \ell'$	0	$\pm\infty$
$\ell' = 0$	0	0	
$\ell' = \pm\infty$	$\pm\infty$		$\pm\infty$

On suppose en outre que (v_n) est une suite strictement positive à partir d'un certain rang.
Le tableau ci-contre indique les valeurs de la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$$

en fonction des valeurs de ℓ et ℓ'.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}^\star$	$\ell = 0$	$\ell = \pm\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}^\star$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$
$\ell' = +\infty$	0	0	

Remarque : lorsque l'un des tableaux ci-dessus indique une limite égale à $\pm\infty$, on peut déterminer le signe à l'aide de la règle des signes.

Limites et inégalités

Proposition 1.5.— Passage à la limite dans des inégalités —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites admettant des limites (dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, alors $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

Théorème 1.6.— Théorème de comparaison —. Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles qu'à partir d'un rang N, on ait $u_n \leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 1.7.— Théorème d'encadrement ou des « gendarmes » —. Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels telles qu'à partir d'un rang N, on ait $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Limites des suites géométriques

Théorème 1.8.— Limite d'une suite géométrique de raison positive —. Soit la suite (u_n) une suite géométrique de raison strictement positive $q \in \mathbb{R}^{+\star}$.

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) diverge vers $u_0 \times \infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0 \times \infty$.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Théorème 1.9.— Somme des termes d'une suite géométrique —. Soit la suite (u_n) une suite géométrique de raison strictement positive q vérifiant $0 < q < 1$. Alors la somme des n premiers termes de la suite tend vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0}{1-q}}$$

Démonstrations

Proposition 1.2.— Somme des premiers termes d'une suite géométrique —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Démonstration ▽

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et notons S la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Comme la suite (u_n) est géométrique de raison q, on a :

$$\begin{array}{rcl} S & = & u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ qS & = & u_0 q + u_1 q + \cdots + u_n q \\ qS & = & u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1} \end{array}$$

Retranchons membre à membre qS à S. Les termes se simplifient deux à deux.

$$\begin{array}{rcl} S - qS & = & (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) - (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1}) \\ & = & (u_0 - \cancel{u_1}) + (\cancel{u_1} - \cancel{u_2}) + \cdots + (\cancel{u_n} - u_{n+1}) \\ & = & u_0 - u_{n+1} = u_0(1 - q^{n+1}) \end{array}$$

Finalement, le résultat s'ensuit en divisant les deux membres de l'égalité par $1 - q > 0$. ▲

Théorème 1.9.— Somme des termes d'une suite géométrique —. Soit la suite (u_n) une suite géométrique de raison strictement positive q vérifiant $0 < q < 1$. Alors la somme des n premiers termes de la suite tend vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0}{1-q}}$$

Démonstration ▽

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. D'après la **proposition 1.2**,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \quad = \quad u_0\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0}{1-q} - \frac{u_0}{1-q}\ q^{n+1}$$

Comme la raison q vérifie $0 < q < 1$, on sait, d'après le **théorème 1.8** que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_0}{1-q}\ q^{n+1} = 0$. D'après le **théorème 1.4**, il s'ensuit que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0}{1-q}$. ▲

Approfondissements, algorithmes

Prolongements algorithmiques

Calcul des termes successifs d'une suite récurrente

Très fréquemment, une suite est définie par une valeur initiale et une relation de récurrence dans laquelle la valeur d'un terme est fonction du terme précédent :

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} \bullet & u_0 = a \\ \bullet & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

L'algorithme et le programme en Python suivants permettent de calculer le terme de rang n d'une telle suite.

```
Fonction Suite_recurrente(f,a,n)
Donnees
f : fonction;  a,u : reels;  n,k : entiers
Début
u  ← a
Pour k variant de 0 à n−1
        Faire
        u ← f(u)
        Fin Faire
Retourner(u)
Fin
```

```python
def Suite_recurrente(f,a,n):
    u=a
    for k in range(n):
        u=f(u)
    return(u)
```

Recherche de seuils

On considère une suite monotone. On recherche le rang du premier terme qui dépasse une valeur donnée appelée seuil. Lorsque la suite est croissante (resp. décroissante), on recherche le rang du premier terme de la suite supérieur (resp. inférieur) au seuil fixé. L'algorithme proposé suppose que la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

```
u ← a
n ← 0
s ← seuil
Tant que u < s
        Faire
        u ← f(u)
        n = n + 1
        Fin Faire
Afficher n
```

Exemple : voici un programme de recherche de seuil en Python applicable dans le cas d'une suite u croissante ou décroissante. a est le premier terme et f est la fonction de récurrence définie précédemment.

```
def algo_seuil(f, a, s):
    u = a
    n = 0
    v = f(a)
    if a < v:
        while u < s:
            u = f(u)
            n=n+1
    else:
        while u > s:
            u = f(u)
            n=n+1
    return n
```

Approximation

Lorsqu'une suite converge vers une limite ℓ, ses termes sont aussi proches qu'on le souhaite de ℓ pourvu que le rang n soit assez grand. Ainsi, les termes sont des valeurs approchées de ℓ.

Valeurs approchées de π : on peut prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$.

Les termes de rang 100 (par exemple) de ces suites constituent donc des valeurs approchées de π.

```
def lim_pi1(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s=s+n/(n**2+k**2)
    return s*4
def lim_pi2(n):
    s = 0
    for k in range(1,n+1):
        s=s+n/(n**2+k**2)
    return s*4
print("pi:",math.pi)
print(lim_pi1(100))
print(lim_pi2(100))
```

Valeurs approchées de $\sqrt{2}$: la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$ est convergente de limite $\sqrt{2}$. À l'aide de la fonction `Suite_recurrente (f,1,4)` appliquée à la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$, on trouve $u_4 \approx 1,4142135623747$ et $\sqrt{2} \approx 1,4142135623731$.

Valeurs approchées de $\ln(2)$: on peut démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln(2)$. Calculons le terme de rang n de cette suite.

```
def lim_ln2(n):
    s = 0
    for i in range(n):
        s=s+1/(n+i)
    return s
print("ln(2):",math.log(2))
print(lim_ln2(100))
```