
TABLE DES MATIÈRES

Avant propos	iii
1 Espaces vectoriels	1
1.1 Définitions et propriétés de base	1
1.1.1 Espace vectoriel sur un corps quelconque	1
1.1.2 Conséquences de la définition	1
1.1.3 Exemples fondamentaux	2
1.2 Sous-espaces vectoriels	3
1.2.1 Définition et exemples	3
1.2.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels	5
1.2.3 Sous-espaces supplémentaires	10
1.3 Espace vectoriel quotient	13
1.4 Partie génératrice – Partie libre – Base	14
1.4.1 Combinaisons linéaires - Partie génératrice	14
1.4.2 Partie libre	15
1.4.3 Base	16
1.5 Espaces vectoriels de dimension finie	19
1.5.1 Définition et exemples	19
1.5.2 Théorème de la dimension finie	20
1.5.3 Théorème de la base incomplète	26
1.5.4 Identités remarquables concernant la dimension	28
1.6 Exercices	31
1.7 Solutions des exercices	36
2 Applications linéaires – Matrices	51
2.1 Applications linéaires – Isomorphisme d'espaces vectoriels	51

2.1.1	Définition et propriétés de base	51
2.1.2	Noyau et image d'une application linéaire	55
2.1.3	Décomposition canonique - Théorème du rang	58
2.2	Endomorphismes – Automorphismes	61
2.3	Exemples d'endomorphismes remarquables	65
2.3.1	Projection sur un sous-espace vectoriel - Projecteurs	65
2.3.2	Symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel	67
2.3.3	Affinités - Dilatations - Transvections	68
2.4	Matrices	71
2.4.1	Opérations sur les matrices	71
2.4.2	Matrices élémentaires	74
2.4.3	Matrices de transvection - Matrices de dilatation - Génération de $GL_n(\mathbb{K})$	75
2.4.4	Trace d'une matrice carrée	78
2.5	Matrices et applications linéaires	79
2.5.1	Matrice d'une application linéaire	79
2.5.2	Matrice de passage – Changement de base	82
2.6	Rang d'une application linéaire - Rang d'une matrice	86
2.6.1	Définition et propriétés de base	86
2.6.2	Rang et matrices équivalentes	87
2.7	Exercices	90
2.7.1	Noyau, image, isomorphisme, automorphisme, théorème du rang	90
2.7.2	Rang - Théorème du rang	94
2.7.3	Projecteurs	96
2.7.4	Matrices, applications linéaires de matrices	99
2.8	Solution des exercices	102
3	Formes linéaires – Dualité	131
3.1	Formes linéaires et hyperplans	131
3.2	Espace vectoriel dual	134
3.3	Base duale	136
3.4	Base préduale	141
3.5	Prolongement des formes linéaires	142
3.6	Orthogonalité	143
3.7	Bidual	148
3.8	Transposée d'une application linéaire	149
3.9	Exercices	152
3.10	Solution des exercices	155

4	Formes multilinéaires – Déterminants	165
4.1	Formes multilinéaires	165
4.1.1	Définitions et propriétés de base	165
4.1.2	Formes multilinéaires alternées	167
4.2	Déterminants	172
4.2.1	Déterminant d'un système de vecteurs	172
4.2.2	Déterminant d'un endomorphisme	174
4.2.3	Déterminant d'une matrice	176
4.2.4	Développement d'un déterminant	179
4.2.5	Inverse d'une matrice	184
4.2.6	Déterminant de Vandermonde	185
4.3	Exercices	187
4.4	Solutions des exercices	190
5	Réduction des endomorphismes	199
5.1	Polynômes et endomorphismes	199
5.1.1	Notations et définitions	199
5.1.2	Polynôme minimal	200
5.1.3	Polynôme caractéristique	203
5.1.4	Théorème de Cayley-Hamilton	206
5.1.5	Théorème de décomposition des noyaux	209
5.2	Diagonalisation	211
5.2.1	Valeurs propres - Vecteurs propres	211
5.2.2	Sous-espaces propres	212
5.2.3	Endomorphismes diagonalisables	215
5.2.4	Diagonalisation simultanée	223
5.3	Trigonalisation	225
5.4	Endomorphismes nilpotents	229
5.5	Jordanisation d'un endomorphisme nilpotent	234
5.6	Décomposition de Dunford	241
5.7	Réduction de Jordan	245
5.7.1	Base et matrice de Jordan	245
5.7.2	Technique de jordanisation en petites dimensions	247
6	Applications de la réduction	255
6.1	Calcul de l'exponentielle d'une matrice	255
6.1.1	Norme d'une matrice	255
6.1.2	Exponentielle d'une matrice	256
6.2	Systèmes et équations différentiels linéaires	262
6.2.1	Définition d'un système différentiel	262
6.2.2	Résolution pratique d'un système différentiel	263
6.2.3	Solutions réelles	268

6.3	Equations différentielles linéaires à coefficients constants	270
6.3.1	Equation homogène	270
6.4	Exercices	272
6.5	Solutions des exercices	285
7	Formes bilinéaires symétriques - Formes quadratiques	315
7.1	Formes bilinéaires symétriques	315
7.1.1	Définition et propriétés élémentaires	315
7.1.2	Matrice d'une forme bilinéaire	317
7.1.3	Ecriture matricielle	318
7.1.4	Changement de base	319
7.1.5	Rang d'une forme bilinéaire	319
7.1.6	Formes bilinéaires symétriques non dégénérées	320
7.1.7	Orthogonalité	321
7.1.8	Isotropie	324
7.1.9	Bases orthogonales	326
7.2	Formes quadratiques	327
7.2.1	Définition et propriétés élémentaires	327
7.2.2	Méthode de Gauss de réduction d'une forme quadratique	330
7.3	Signature d'une forme bilinéaire symétrique	335
7.3.1	bases orthonormales	335
7.3.2	Théorème d'inertie de Sylvester	337
7.4	Exercices	339
7.5	Solution des exercices	344
8	Espaces euclidiens	359
8.1	Produit scalaire	359
8.1.1	Définition et propriétés élémentaires	359
8.1.2	Notations et règles de calcul	362
8.1.3	Utilisation des bases orthonormales	363
8.2	Inégalité de cauchy-Schwarz	364
8.3	Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	367
8.4	Changement de bases orthonormales - Orientation	369
8.5	Produit vectoriel	371
8.5.1	Formes linéaires d'un espace euclidien	371
8.5.2	Définition et propriétés du produit vectoriel	372
8.6	Exercices	376
8.7	Solution des exercices	382

9	Endomorphismes d'un espace euclidiens	397
9.1	Endomorphisme adjoint	397
9.2	Projection orthogonale	400
9.2.1	Projection suivant une direction	400
9.2.2	Définition et propriétés d'une projection orthogonale . .	401
9.2.3	Distance d'un point à un sous-espace vectoriel	406
9.3	Symétrie orthogonale	408
9.3.1	Symétrie suivant une direction	408
9.3.2	Propriétés des symétries orthogonales	409
9.4	Endomorphismes symétriques	410
9.4.1	Définition et propriétés des endomorphismes symétriques	410
9.4.2	Formes bilinéaires symétriques d'un espace euclidien . .	413
9.5	Endomorphismes orthogonaux	417
9.5.1	Définition et propriétés de base	417
9.5.2	Cas d'un espace euclidien de dimension 2	420
9.5.3	Cas d'un espace euclidien de dimension 3	421
9.5.4	Cas général	425
9.6	Décomposition polaire	428
9.7	Décomposition QR	431
9.8	Exercices	432
9.9	Solution des exercices	450
10	Formes sesquilinéaires - Formes quadratiques hermitiennes	505
10.1	Formes sesquilinéaires - Formes hermitiennes	505
10.1.1	Quelques rappels sur les nombres complexes	505
10.1.2	Définition et propriétés de base	506
10.1.3	Matrice d'une forme sesquilinéaire	506
10.1.4	Écriture matricielle	508
10.1.5	Changement de base	508
10.1.6	Rang d'une forme sesquilinéaire	509
10.1.7	Formes hermitienne non dégénérée	509
10.1.8	Orthogonalité	510
10.1.9	Bases orthogonales	512
10.2	Formes quadratiques hermitiennes	513
10.2.1	Définition et propriétés élémentaires	513
10.2.2	Méthode de Gauss pour la réduction d'une forme quadratique hermitienne	515
10.3	Exercices	520
10.4	Solution des exercices	521

11 Espaces hermitiens	525
11.1 Produit hermitien	525
11.1.1 Définition et exemples	525
11.1.2 Notations et règles de calcul	527
11.1.3 Utilisation des bases orthonormales	527
11.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz	528
11.3 Endomorphismes d'un espace hermitien	529
11.3.1 Endomorphisme adjoint	529
11.3.2 Endomorphismes normaux	531
11.3.3 Endomorphismes hermitiens	534
11.3.4 Endomorphismes unitaires	536
11.4 Exercices	538
11.5 Solution des exercices	540
 Bibliographie	 547
 Index	 547