

I Exercices d'entraînement

I.1 Détermination d'inductances (d'après épreuve 0 Centrale 2015)

Notions du programme en jeu : inductance propre, inductance mutuelle entre deux bobines, circuits couplés, régime libre, régime sinusoïdal forcé.

Une bobine de Ruhmkorff est une association de deux bobines cylindriques de même axe de révolution. L'enroulement primaire (bobine 1) est constitué d'un petit nombre de spires de gros fil de cuivre, alors que l'enroulement secondaire (bobine 2) est constitué d'un très grand nombre de spires de fil de cuivre très fin. Ces bobines ont pour résistances $R_1 = 1,23 \Omega$, $R_2 = 9,75 \text{ k}\Omega$.

Le couplage inductif entre ces bobines correspond au schéma électrocinétique équivalent donné figure 1.1 et est décrit par les équations en régime variable :

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1, \\ u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2. \end{aligned}$$

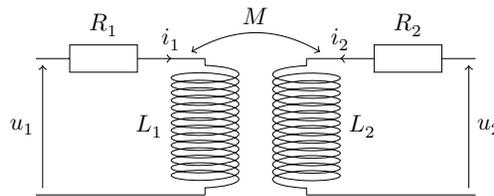


FIGURE 1.1 –

Afin de déterminer les valeurs des coefficients d'auto-inductance L_1 et L_2 et l'inductance mutuelle M , plusieurs expérimentations ont été menées. Des graphes issus des ces différentes expériences sont fournis ci-après.

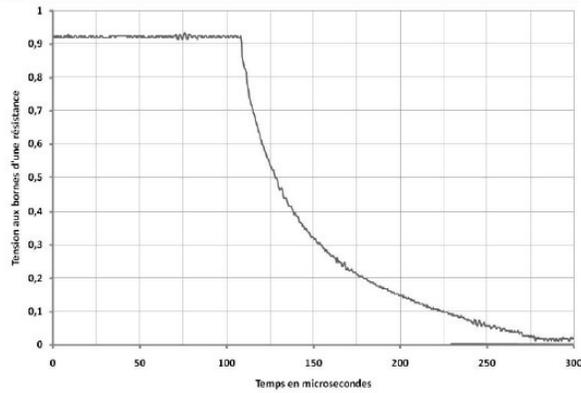


Figure A Expérience 1 : régime transitoire dans le circuit primaire

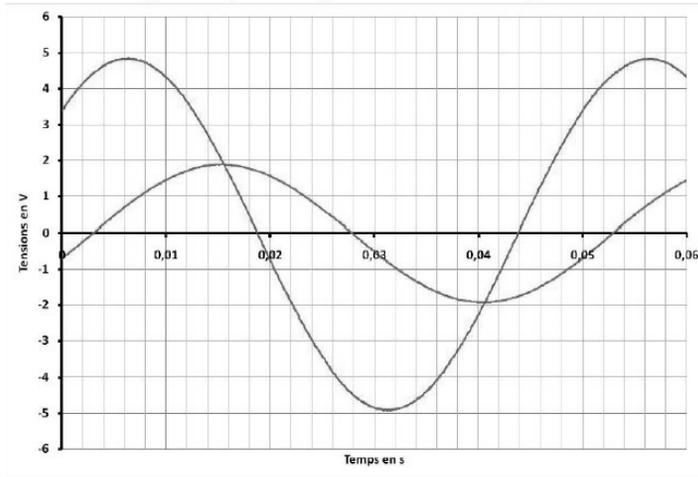


Figure B Expérience 2 : régime sinusoïdal forcé du circuit secondaire

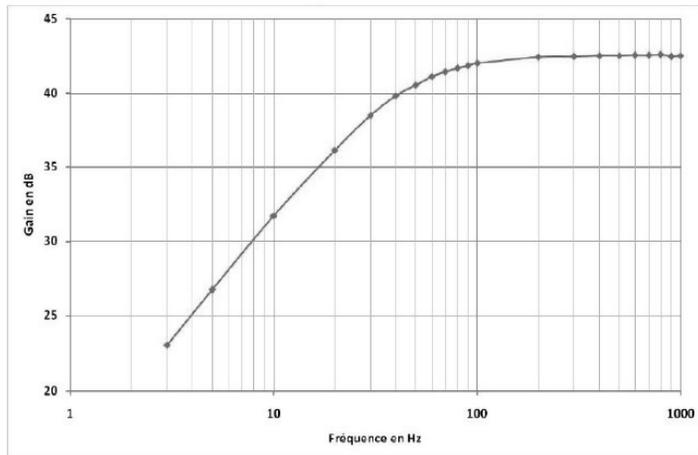


Figure C Expérience 3 : diagramme de Bode du couplage inductif entre les deux bobines coaxiales

FIGURE 1.2 – Résultats des expériences

Expérience 1 : la bobine secondaire étant en circuit ouvert, la bobine primaire est montée en série avec un générateur basse fréquence de résistance interne $R_g = 50 \Omega$ et une résistance additionnelle $R_0 = 100 \Omega$. Le signal délivré par le générateur est une tension périodique en créneaux de valeur minimale nulle. Le signal enregistré, et représenté sur la figure A, est la tension aux bornes de R_0 .

Expérience 2 : la bobine primaire étant en circuit ouvert, la bobine secondaire est associée en série à une résistance $R_a = 1,00 \times 10^4 \Omega$. L'ensemble des deux dipôles est alimenté en signal sinusoïdal. La figure B indique les graphes donnant les deux tensions sinusoïdales aux bornes de la bobine secondaire et de la résistance R_a .

Expérience 3 : deux voltmètres de très grande impédance interne sont branchés aux bornes de la bobine primaire pour l'un et de la bobine secondaire pour l'autre. La bobine primaire est alimentée par un générateur de tension sinusoïdale. Le graphe de la figure C montre que le rapport des deux valeurs efficaces dépend de la fréquence.

En s'appuyant sur ces expériences, estimer les valeurs de L_1 , L_2 et $|M|$.

Solution

Identification des données utiles

L'expérience 1 permet d'obtenir des informations sur la bobine 1 seule, c'est-à-dire sur L_1 (le circuit secondaire est ouvert). L'expérience 2 permet d'obtenir des informations sur la bobine 2 seule, c'est-à-dire sur L_2 (le circuit primaire est ouvert). L'expérience 3 fournit une information sur le couplage (M).

Mise en œuvre

- Expérience 1. Le circuit secondaire étant ouvert, $i_2(t) = 0$, et $u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1$.

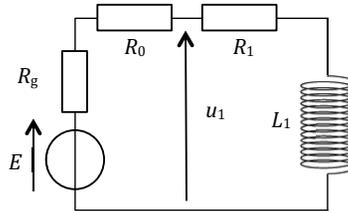


FIGURE 1.3 –

La loi des mailles avec le générateur de tension $E(t)$ donne :

$$E(t) = (R_g + R_0 + R_1)i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}$$

La tension du générateur est un créneau prenant deux valeurs E et 0 . Sur un intervalle de temps où $E(t) = E$, la tension aux bornes de R_0 est

$$U_{R_0}(t) = R_0 i_1(t) = \frac{R_0 E}{R_g + R_0 + R_1} + A \exp(-t/\tau_1), \quad (1.1)$$

avec $\tau_1 = \frac{L_1}{R_g + R_0 + R_1}$.

Sur un intervalle où $E(t) = 0$, la tension aux bornes de R_0 est

$$U_{R_0}(t) = R_0 i_1(t) = B \exp(-t/\tau_1). \quad (1.2)$$

Pour $t < t_1 = 120$ s, la tension aux bornes de R_0 ne varie pas et est positive, elle a atteint sa valeur asymptotique $E_0 = \frac{R_0 E}{R_g + R_0 + R_1}$. Pour $t > t_1$, la tension décroît exponentiellement vers 0, ce qui correspond à l'équation 1.2. La valeur $\tau_1 = 35 \mu\text{s}$ se lit sur la figure A par exemple grâce à l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses, ou encore en déterminant à quelle date $U_{R_0}(t_1 + \tau) = E_0/e$.

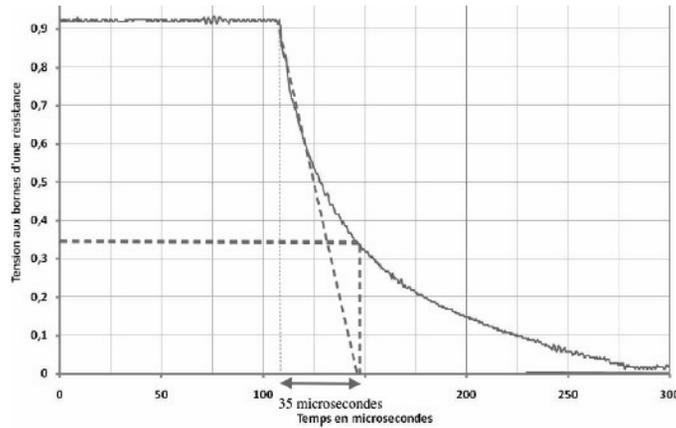


FIGURE 1.4 –

Il s'en déduit $L_1 = \tau_1 (R_g + R_0 + R_1)$

A.N. : $\tau_1 = 35 \mu\text{s}$, $L_1 = 5,3$ mH. cette valeur est de l'ordre de grandeur des composants à enficher utilisés en T.P.

- Expérience 2. Le circuit 1 étant ouvert, $i_1(t) = 0$, et $u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2$. Le circuit constitué de la bobine 2 et de la résistance R_a est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale $e_2(t) = E_2 \cos(\omega t)$. En régime sinusoïdal forcé, et en utilisant les représentations complexes $i_2 = \text{Re}(i_2)$ et $e_2 = \text{Re}(e_2)$:

$$\underline{e}_2 = (R_a + R_2 + jL_2\omega) \underline{i}_2.$$

Les tensions aux bornes de R_a et de la bobine sont respectivement :

$$\underline{U}_{R_a} = \frac{R_a}{R_a + R_2 + jL_2\omega} \underline{e}_2 \quad \text{et} \quad \underline{u}_2 = \frac{R_2 + jL_2\omega}{R_a + R_2 + jL_2\omega} \underline{e}_2 \quad (1.3)$$

La valeur de L_2 peut être déterminée en comparant les amplitudes des deux signaux, qu'on peut identifier puisque l'équation 1.3 montre que U_{R_a} est en retard par

rapport à u_2 :

$$\left| \frac{u_2}{U_{R_a}} \right| = \frac{\sqrt{R_2^2 + (L_2\omega)^2}}{R_a}.$$

L_2 peut aussi être se déduire du déphasage φ de u_2 par rapport à U_{R_a} : $\arg u_2 = \arg U_{R_a} + \arctan \frac{L_2\omega}{R_2}$. La période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ se lit sur le graphe, ainsi que le déphasage $\varphi = 2\pi \frac{t_2}{T}$, où t_2 est le retard de U_{R_a} par rapport à u_2 . D'où

$$L_2 = \frac{R_2 T}{2\pi} \tan \varphi.$$

A.N. : $T = 50$ ms.

Première méthode : $\left| \frac{u_2}{U_{R_a}} \right| \simeq 2,7$, d'où $L_2 = 1,9 \cdot 10^2$ H .

Deuxième méthode : $\varphi = 2\pi \frac{9}{50}$ rad, d'où $L_2 = 1,7 \cdot 10^2$ H . Les deux valeurs sont compatibles. Cette valeur est énorme par rapport aux inductances utilisées en TP, elle est due au très grand nombre d'enroulements de la bobine 2.

- Expérience 3. Les voltmètres étant de très grande impédance interne sont traversés par un courant d'intensité négligeable, et donc $i_2 = 0$. En appelant $e_3(t) = E_3 \cos(\omega t)$ la tension délivrée par le générateur,

$$\begin{cases} u_1(t) = e_3(t) = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \\ u_2(t) = M \frac{di_1}{dt} \end{cases} . \text{ En utilisant les représentations complexes, il}$$

vient : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{jM\omega}{R_1 + jL_1\omega}$. Les voltmètres mesurent les valeurs efficaces U_{1eff} et U_{2eff} , et

$$\frac{U_{2eff}}{U_{1eff}} = \frac{M\omega}{\sqrt{R_1^2 + (L_1\omega)^2}} \quad (1.4)$$

On retrouve bien, sur la figure C, le comportement passe-haut avec pour le gain $G_{dB} = 20 \lg \left(\frac{U_{2eff}}{U_{1eff}} \right)$. L'asymptote horizontale à haute fréquence a pour équation $G_{dB} = 20 \lg \left(\frac{M}{L_1} \right)$ et permet de calculer M . Une autre méthode consiste à chercher l'intersection avec l'axe des abscisses de l'asymptote à basse fréquence $G_{dB} = 20 \lg \left(\frac{M\omega}{R_1} \right)$, ce qui n'utilise pas de valeurs déjà calculées.

A.N. : La première méthode donne $M = 0,71$ H, et la seconde $M = 0,75$ H.

On retient donc :

$$\begin{cases} L_1 = 5,3 \text{ mH} \\ L_2 = 1,7 \cdot 10^2 \text{ H} \\ M = 0,7 \text{ H} \end{cases} .$$

I.2 Caractéristiques d'un filtre (Centrale MP 2015)

Notions du programme en jeu : filtrage linéaire, fonction de transfert, modèles simples de filtres.

Quatre essais ont été réalisés en laboratoire, à quatre fréquences différentes, avec un filtre d'ordre 2 réalisé avec un composant intégré, le LMF100. Sur les quatre oscillogrammes relevés figure 1.5, $s_2(t)$ désigne la tension de sortie du filtre et $s_1(t)$ la tension d'entrée. Déduire de ces quatre essais la nature du filtre testé, ainsi que ses caractéristiques : fréquence propre, fréquence de coupure, facteur de qualité. Expliciter clairement la démarche et commenter les résultats obtenus.

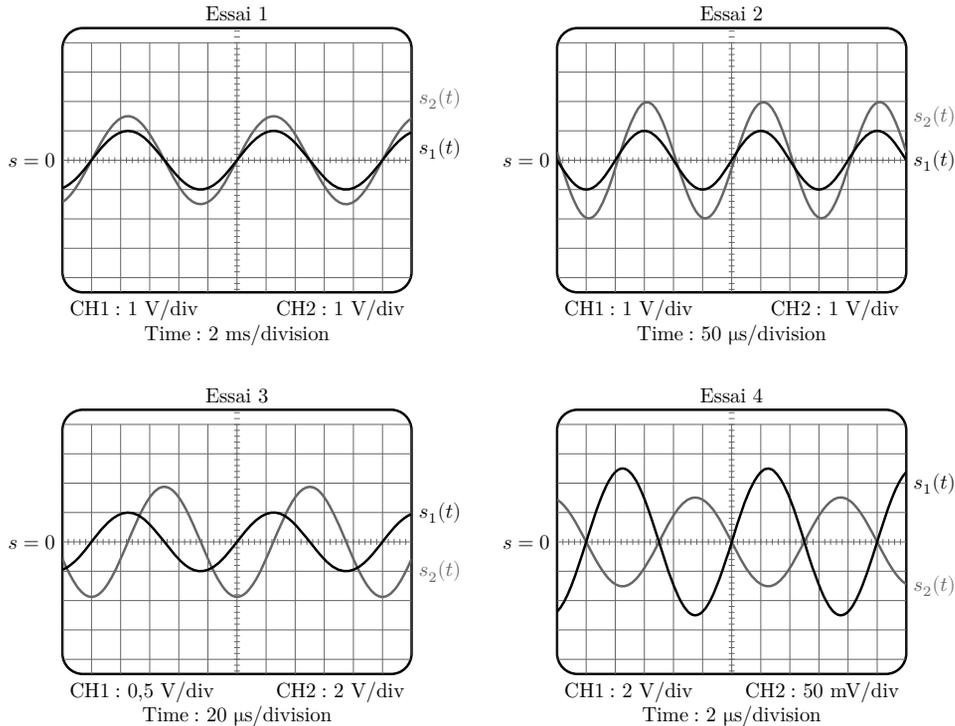


FIGURE 1.5 –

Annexe :

Ce document fournit les spécifications du LMF100, qui est un composant intégré réalisant différents types de filtrage, selon les branchements qu'on lui applique. Dans ce document, la grandeur s est égale à $j\omega$ où ω est la pulsation des signaux sinusoïdaux et $j^2 = -1$.

Filtres réalisables avec le LMF100

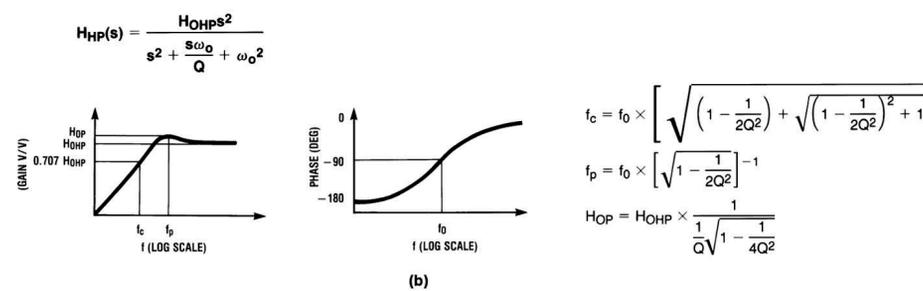
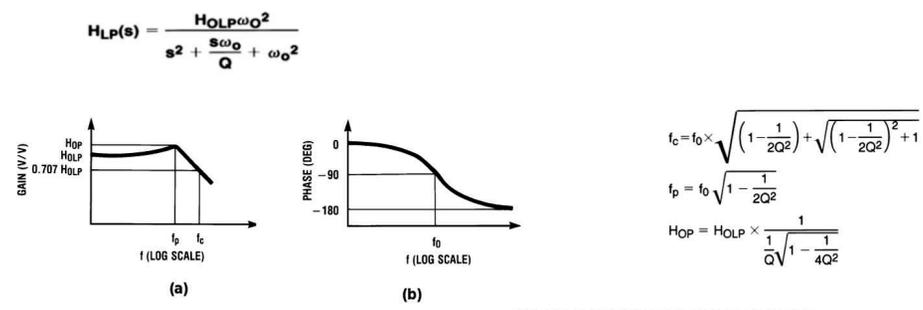
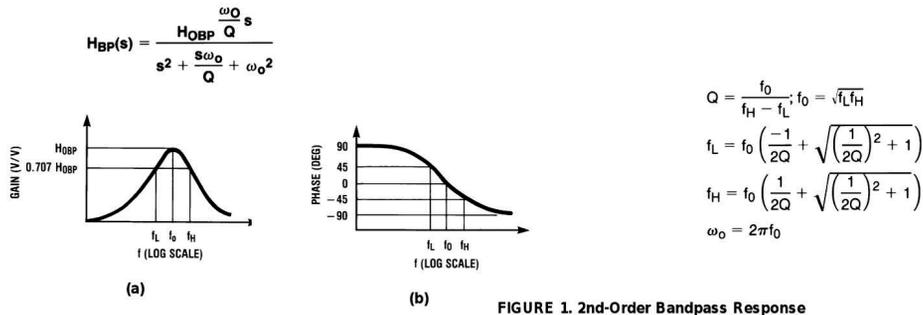


FIGURE 1.6 – Les filtres réalisables avec le LMF100

Solution

Les oscillogrammes fournissent des renseignements sur la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{V_{s2}}{V_{s1}}$. Le module de H est le rapport des amplitudes de $V_{s2}(t)$ et $V_{s1}(t)$. L'argument de H est le déphasage de $V_{s2}(t)$ par rapport à $V_{s1}(t)$.

Essai	1	2	3	4
Période	10 ms	0,20 ms	0,10 ms	10 μ s
Fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ (Hz)	0,10 kHz	5,0 kHz	10 kHz	1,0.10 ² kHz
Module $ \underline{H} $	1,5	2,0	7,6	0,15
Phase $\varphi = \arg \underline{H} $	0	< 0 (proche de 0)	$-\pi/2$	$\pm\pi$

L'évolution de la phase montre qu'il s'agit d'un passe-bas du second ordre (figure 2 de l'annexe). L'évolution du module de \underline{H} donnée par le tableau ci-dessus est bien cohérente avec le gain du filtre donné dans la figure 2b.

La fonction de transfert est donc de la forme

$$\underline{H} = \frac{H_{\text{OLP}}\omega_0^2}{(j\omega)^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \quad (1.5)$$

Le déphasage de $-\pi/2$ est obtenu pour $f = f_0$, selon le graphe (figure 2b) de la phase. Le tableau ci-dessus fournit donc $f_0 = 10$ kHz.

Pour $f = f_0$, (1.5) fournit $\underline{H}(j2\pi f_0) = -jQH_{\text{OLP}}$. Avec la valeur $H_{\text{OLP}} = 1,5$, qui s'obtient à basses fréquences pour $f = 0,10$ kHz (le déphasage est bien nul à cette fréquence), cela permet d'obtenir le facteur de qualité $Q = \frac{|\underline{H}(j2\pi f_0)|}{H_{\text{OLP}}} = 5,1$.

Les relations données $f_p = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ et $f_c = f_0\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}$ permettent d'en déduire les valeurs numériques $f_p = 9,9$ kHz $\simeq f_0$ et $f_c = 16$ kHz.

II Analyses de documents

II.1 Le CD (extrait concours TPC 2016)

Notions du programme en jeu : filtrage linéaire, traitement du signal (ce sujet peut concerner toutes les filières, sauf la justification demandée question 3 qui concerne les filières MP et PSI).

Les informations stockées sur un CD sont enregistrées sous forme numérique sur une seule piste qui s'enroule en spirale sur le disque.

1. Déterminer la valeur numérique de la surface utile du CD, c'est-à-dire celle contenant l'information.
2. Estimer la longueur totale L de la piste. En déduire la durée maximale d'un enregistrement et comparer cette valeur aux données disponibles.
3. Les informations audio stockées sur le CD ont été préalablement numérisées. Quel est le domaine fréquentiel correspondant au domaine audible ? Préciser la fréquence à laquelle sont échantillonnées les informations sonores enregistrées sur le CD et justifier la valeur choisie.
4. En utilisant la durée maximale d'enregistrement et les données du paragraphe « Format du signal numérisé » du document, retrouver la capacité de stockage affichée