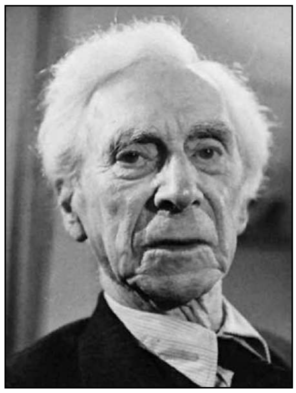
Chapitre **1**

# Raisonnements mathématiques

Le mathématicien italien Giuseppe **Peano** était très soucieux d'exposer les mathématiques dans un cadre précis et rigoureux. Dans son *Formulaire mathématique* publié en 1895, il introduisit de nombreux symboles nouveaux. On lui doit en particulier $\cap$ et $\cup$ désignant respectivement l'intersection et la réunion. Il utilise la lettre grecque *epsilon*, abréviation du grec *esti, il est*, pour noter l'appartenance et introduit le quantificateur existentiel qu'il note $\exists$, renversant un E pour signifier l'initiale du mot italien *esiste*. Il propose aussi de supprimer les déclinaisons du latin pour obtenir une langue internationale, simple et comprise par tous, qu'il nomme *Latino sine flexione*. Le logicien anglais Bertrand **Russel** propose un paradoxe qui remet en cause la théorie des ensembles et nécessite de la fonder sur un système d'axiomes.



**Bertrand Russel**
**1872-1970**

# ■■ Objectifs

## ■ Les incontournables

▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.

▷ Savoir mettre en place un contre-exemple.

## ■ Et plus si affinités

▷ Savoir mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.

▷ Savoir manipuler les connecteurs logiques et les quantificateurs.

# ■■ Résumé de cours

## ■ Les éléments du raisonnement

### ❑ Proposition

**Définition 1.1.** — On appelle proposition toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable $x$, nous pourrons la noter $\mathcal{P}(x)$.

**Remarque 1.1** — On écrira indifféremment " $\mathcal{P}$ " ou " $\mathcal{P}$ est vraie ".

**Exemple 1.1.** — Pour tout réel $x$ strictement positif, "$x-1>0$" est une proposition dépendante de la variable $x$. Elle est vraie si $x>1$, et fausse sinon.
**Exemple 1.2.** — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.
**Exemple 1.3.** — Pour tout réel $x$, "$(2x+1)^2$" n'est pas une proposition.

### ❑ Quantificateurs

**Notation** — Le signe "$\forall$" placé devant une variable $x$ signifie "*quel que soit x...*".
Le signe "$\exists$" placé devant une variable $x$ signifie "*il existe (au moins) un x...*".
Le signe "$\exists!$" placé devant une variable $x$ signifie "*il existe un unique x...*".
"$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+1>0$" se lit : "quel que soit le réel $x$, $x^2+1$ est strictement positif" ou "pour tout réel $x$, $x^2+1$ est strictement positif".
"$\exists x\in]0,+\infty[,\ x^2-9=0$" se lit : "il existe au moins un réel $x$ strictement positif tel que $x^2-9$ est égal à 0" (il y en a d'ailleurs un unique : il s'agit de $x=3$).
"$\exists! n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{n(n+1)}{2}=3$" se lit : "il existe un unique entier naturel $n$ non nul tel que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3" (il s'agit du nombre 2).
**Remarque 1.2.** — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un x*" signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

**Propriété 1.1.** — En général, la proposition $(\forall x,\exists y,\mathcal{P}(x,y))$ est différente de $(\exists y,\forall x,\mathcal{P}(x,y))$.

**Exemple 1.4.** — La proposition "$\forall x\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{Z},\ n\le x<n+1$" énonce que, quel que soit le réel $x$, il existe un entier $n$, tel que $x$ soit compris entre $n$ et $n+1$, cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière de $x$). Elle est différente de la suivante : "$\exists n\in\mathbb{Z},\forall x\in\mathbb{R},n\le x<n+1$" qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

**Remarque 1.3.** — Dans l'expression "$\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x\in\mathbb{R},\ ...$", il faut noter que $x$ dépend de $y$, on devrait en toute rigueur le noter $x_y$ ou $x(y)$, ce que l'on ne fait presque jamais.

## ❑ Connecteurs logiques

**Définition 1.2.** — La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée non$\mathcal{P}$ et appelée *négation* de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

**Propriété 1.2.** — La négation de $(\forall x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\exists x, \text{non}\,\mathcal{P}(x))$.
La négation de $(\exists x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\forall x, \text{non}\,\mathcal{P}(x))$.

**Exemples 1.5.** — Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "*les trois numéros obtenus sont pairs*" est "*au moins un des numéros obtenus est impair*".
La négation de "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$" est : "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, x < n$ ou $x \geq n+1$".
La première proposition est vraie puisqu'elle définit l'entier *n* qui est la partie entière de *x* (voir **exemple 1.4**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel *x* tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle $]x-1, x]$.

**Définition 1.3.** — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{Q}$, soit les deux).
**Exemple 1.6.** — Pour un dé lancé, on considère $\mathcal{P}$ : "*le numéro sorti est pair*", et $\mathcal{Q}$ : "*le numéro sorti est supérieur ou égal à* 3". Alors, ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est 2, 3, 4, 5 ou 6*".

**Définition 1.4.** — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) (les deux simultanément).
**Exemple 1.7.** — En reprenant l'**exemple 1.7**, ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 4 *ou* 6".

**Définition 1.5.** — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *implique* $\mathcal{Q}$, et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie (l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).
**Vocabulaire** — Lorsque $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$, et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment montrer une proposition par implication ?**

**Exemple 1.8.** — Pour tout réel *x*, on a : $(x = x^2) \Rightarrow (x \geq 0)$ (l'implication réciproque est fausse).

**Définition 1.6.** — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *équivaut* à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.
**Vocabulaire** — Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante de $\mathcal{Q}$.

**Exemple 1.9.** — $\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{a} < \sqrt{b}) \Leftrightarrow (a < b)$.

**Exemple 1.10.** — Pour tout entier *n*, *n* est multiple de 6 si, et seulement si, *n* est multiple à la fois de 2 et de 3.

## ■ Différents types de raisonnements

### ❑ Démonstration par contre-exemple

**Théorème 1.1.** — Pour montrer qu'une propriété n'est pas toujours vraie, on trouve un contre-exemple, c'est-à-dire un exemple pour lequel la propriété est fausse.

⇨ **Méthode 1.2. Comment utiliser le contre-exemple ?**

### ❑ Démonstration par l'absurde

**Théorème 1.2.** — Quelles que soient les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, pour montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ est fausse. Ensuite on tente d'en déduire une contradiction.

⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par l'absurde ?**

### ❑ Démonstration par récurrence

**Théorème 1.3.** — Pour un entier naturel $n$, considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$.
Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, pour un entier naturel $n$ **fixé supérieur ou égal à** $\boldsymbol{n_0}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ implique la proposition $\mathcal{P}(n+1)$, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à $n_0$.

⇨ **Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence ?**

**Vocabulaire.** — La preuve de $\mathcal{P}(n_0)$ s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication $\left(\mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\right) \Rightarrow \left(\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}\right)$ s'appelle l'*hérédité* de la proposition.
**Attention !** Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n$. C'est pour un entier $n$ **fixé** que l'on montre que, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
**Remarque 1.4.** — La plupart du temps, on a $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

# ■■ Méthodes

## ■ Différents types de raisonnement

### ❑ Méthode 1.1. Comment montrer une proposition par implication ?

La plupart du temps, pour prouver une proposition, on procède par implication (sans se sentir obligé d'utiliser le symbole $\Rightarrow$) en construisant un raisonnement "direct".

⇨ Exercice 1.3

**Exemple.** Montrer que, si $x < 1$, alors $(x-4)^2 > 9$.
Si $x < 1$, alors on a : $x - 4 < -3$.
Par décroissance de la fonction "carré" sur $\mathbb{R}_-$, on en déduit que : $(x-4)^2 > 9$.

Avec des notations plus symboliques, on vient de montrer que : $x < 1 \Rightarrow (x-4)^2 > 9$.

### ❑ Méthode 1.2. Comment utiliser le contre-exemple ?

Pour montrer qu'une implication est fausse, il suffit de trouver un exemple qui montre que c'est le cas.

⇨ Exercices 1.1, 1.2

**Exemple.** Montrer que si l'on a $x^2 = y^2$, alors on ne peut pas en déduire que $x = y$.
En effet, avec $x = 2$ et $y = -2$, on a bien $x^2 = y^2$ et pourtant, on a : $x \neq y$.

### ❑ Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par l'absurde ?

Pour montrer qu'une implication est vraie, il suffit de supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, puis d'en déduire une contradiction.

⇨ Exercice 1.4

**Exemple.** Montrer que pour tout nombre réel $x$ différent de $-3$, on a : $\dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

Par l'absurde, si l'on avait $\dfrac{x+1}{x+3} = 1$, alors on en déduirait $x+1 = x+3$, ce qui équivaut à $1 = 3$.

Ceci étant manifestement faux, on en déduit que : $\forall x \neq -3,\ \dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

## ❑ Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence ?

$n_0$ est ici un entier naturel fixé.
On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n$ à partir de $n_0$.

- Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : on considère un entier $n$ fixé supérieur ou égal à $n_0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. En utilisant $\mathcal{P}(n)$, on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n$ supérieur ou égal à $n_0$.

⇨ **Exercices 1.5, 1.6**

**Exemple.** On pose $u_0 = 1$ et on suppose que, pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} = u_n{}^2$
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ est constante égale à 1.
On commence par noter, pour $n$ entier naturel, $\mathcal{P}(n)$ : "$u_n = 1$".
• Initialisation : on a bien $u_0 = 1$.
• Hérédité : on suppose que $u_n = 1$ pour un entier naturel $n$ fixé dans $\mathbb{N}$.
On a alors : $u_{n+1} = 1^2 = 1$.
Ceci montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
• En conclusion, on a bien montré, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

## ■■ Vrai/Faux

| | | Vrai | Faux |
|---|---|---|---|
| **1.** | $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [x, +\infty[, \exists n \in \mathbb{N}, x \leq n \leq y$. | ☐ | ☐ |
| **2.** | $\exists! y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = y$. | ☐ | ☐ |
| **3.** | La fonction *f* n'est pas la fonction nulle signifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$. | ☐ | ☐ |
| **4.** | Pour toute fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(-x)$. | ☐ | ☐ |
| **5.** | Il existe au moins une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)$ | ☐ | ☐ |
| **6.** | On désigne par $a$ et $b$ deux réels, alors : $(ab \neq 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0)$. | ☐ | ☐ |
| **7.** | L'équation $x^2 = -x$ n'a pas de solution. | ☐ | ☐ |
| **8.** | Pour tout réel $x$ positif, on a : $x^2 \geq x$. | ☐ | ☐ |
| **9.** | Pour tout réel $x$ strictement négatif, on a : $x^2 \geq x$. | ☐ | ☐ |
| **10.** | Si $\mathcal{P}(n)$ est "$u_{2n+1} \leq 2^n$", alors $\mathcal{P}(n+1)$ est "$u_{2n+2} \leq 2^{n+1}$". | ☐ | ☐ |