CHAPITRE 1

La récurrence

La notion d'entier naturel nous est familière depuis notre enfance puisque c'est avec les nombres 1, 2, 3 ... que l'apprentissage numérique débute en CP ou en grande section de maternelle. Jusqu'au XIX^{e} siècle cette perception intuitive des entiers suffisait au mathématicien.

Avec l'invention de la théorie des ensembles, le mathématicien Richard Dedekind (1831-1916) et le mathématicien logicien Guiseppe Peano (1858-1932) ont établi une définition axiomatique et une construction rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, notamment grâce aux axiomes de Peano dont les formulations sont :

Axiome 1 : Tout entier naturel n admet un successeur qui est $n+1$.

Axiome 2 : $0 \in \mathbb{N}$.

Axiome 3 : Si A est une partie de $\mathbb{N}$ telle que :

$\triangleright$ $0 \in A$, et

$\triangleright$ si $n \in A$, alors $n+1 \in A$,

alors $A = \mathbb{N}$.

Ce dernier axiome est connu sous le nom de "principe de récurrence".

Il est aussi possible de définir $\mathbb{N}$ à travers une axiomatique s'appuyant sur l'ordre qui est défini sur cet ensemble par la relation $\leq$. Ainsi nous énonçons :

Axiome 4 : $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

Axiome 5 : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

En nous appuyant sur ce dernier axiome, nous allons prouver que le principe de récurrence (Axiome 3) énoncé ci-dessus peut quitter le statut d'axiome et être démontré.

1.1 Le principe de récurrence

Ce principe repose sur la propriété axiomatique du plus petit élément des entiers naturels (axiome 5) citée ci-dessus dont l'énoncé plus précis est :

Axiome (Axiome du plus petit élément)**.** *Toute partie B non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément p, ce qui signifie*

$$\exists p \in \mathbb{N},\, \forall b \in B,\, b \geq p \,\text{et}\, p \in B.$$

Proposition (principe de récurrence)**.** *Si A est une partie de $\mathbb{N}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

- $0 \in A,$
- $\forall n \in \mathbb{N}, (n \in A \Rightarrow n+1 \in A),$

alors $A = \mathbb{N}$.

Démonstration. Nous supposons par l'absurde que $A \neq \mathbb{N}$.

Nous considérons, dans ce cas,

$$B = \complement_{\mathbb{N}} A = \{n \in \mathbb{N} / n \notin A\}.$$

Nous observons que :

▷ $B \neq \emptyset$ car sinon $A = \mathbb{N}$.

▷ $0 \notin B$ car $0 \in A$.

Par conséquent, B est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc B admet un plus petit élément $p \geq 1$.

Nous en déduisons que $p \in B$ et $p - 1 \notin B$.

Puisque $p - 1 \in \mathbb{N}$, nous avons $p - 1 \in A$.

En appliquant la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \in A \Rightarrow n+1 \in A),$$

en particulier, pour $n = p - 1$, il vient

$$p \in A,$$

ce qui est contradictoire car $A \cap B = \emptyset$.

Nous en concluons que $A = \mathbb{N}$.

1.2 Le raisonnement par récurrence

Proposition (récurrence à partir du rang 0)**.** *Soit $p(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.*

Si

- *$p(0)$ est vraie,*

et

- *pour un entier naturel n fixé , $p(n)$ vraie implique $p(n+1)$ vraie,*

alors

$$\text{quel que soit } n \in \mathbb{N}, \text{ la proposition } p(n) \text{ est vraie.}$$

Démonstration. Nous appliquons le principe de récurrence à

$$A = \{n \in \mathbb{N}/p(n) \,\text{vraie}\}.$$

Remarques. Nous en donnons quatre.

- La première condition est l'initialisation de la récurrence.
- La condition $p(n)$ vraie, pour un entier naturel n fixé, est fréquemment appelée *hypothèse de récurrence* et notée H_n ; il s'agit donc de prouver

$$H_n \Rightarrow H_{n+1}.$$

- La seconde condition signifie que la propriété est héréditaire.
- Le raisonnement par récurrence est assez naturel comme le montre l'illustration suivante.

"Je suis en bas de l'escalier de la tour Eiffel et je constate que les premières marches sont peintes en jaune. Rien ne me permet d'affirmer que toutes les marches sont peintes en jaune. Mais un touriste logicien bienveillant, qui termine sa visite de la tour, m'indique que si une marche est peinte en jaune, alors la suivante aussi.

Nous en concluons que toutes les marches sont peintes en jaune."

Proposition (récurrence à partir d'un rang entier n_0)**.** *Soit $p(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Si

- *$p(n_0)$ est vraie,*

et

- *pour un entier naturel $n \geq n_0$ fixé, $p(n)$ vraie implique $p(n+1)$ vraie,*

alors, quel que soit l'entier $n \geq n_0$, la proposition $p(n)$ est vraie.

Démonstration. Nous posons $k = n - n_0$, ainsi $k \in \mathbb{N}$.

Désignons par $q(k)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par : "$p(n_0 + k)$est vraie".

Initialisation. $q(0)$ est vraie puisque $p(n_0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un entier naturel k quelconque mais fixé, on ait $q(k)$ vraie, ce qui signifie $p(n_0 + k)$ vraie, soit $p(n)$ vraie.

En appliquant l'hypothèse de récurrence, cela implique $p(n+1)$ vraie, c'est-à-dire $p(n_0 + k + 1)$vraie, soit $q(k+1)$ vraie.

En appliquant la proposition précédente, nous obtenons

$$\forall k \in \mathbb{N},\ q(k) \text{ vraie},$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq n_0,\ p(n) \text{ vraie}.$$

Exemples. Nous en proposons deux ainsi qu'un contre-exemple.

1$^{\text{er}}$ exemple. Nous démontrons par récurrence, l'égalité suivante communément admise :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x^n| = |x|^n.$$

Soit x un réel non nul.

Initialisation.

Pour $n = 0$, nous avons

$$|x^0| = |1| = 1 = |x|^0,$$

ce qui justifie que l'égalité proposée est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité.

Nous supposons que pour un entier naturel n fixé, on ait

$$|x^n| = |x|^n.$$

Il s'agit de montrer que $|x^{n+1}| = |x|^{n+1}$.

Or nous avons

$$|x^{n+1}| = |x^n \times x| = |x^n| \times |x|,$$

ce qui donne, en appliquant l'hypothèse de récurrence,

$$|x^{n+1}| = |x|^n \times |x| = |x|^{n+1}.$$

Ainsi l'égalité attendue est héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, |x^n| = |x|^n.$$

2e exemple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous prouvons par récurrence l'égalité exprimant la somme des n premiers carrés qu'il est souhaitable de retenir :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Initialisation.

Pour $n = 1$, nous avons, d'une part,

$$\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = 1,$$

d'autre part,

$$1^2 = 1.$$

L'égalité est vraie au rang 1.

Hérédité.

Nous supposons que pour un entier n non nul fixé, nous disposons de l'égalité

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Montrons que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2, \\ &= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right], \\ &= \frac{(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right)}{6}. \end{aligned}$$

Nous vérifions ensuite que :

$$2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3),$$

ce qui donne :

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

ce qui prouve que l'égalité proposée est vraie au rang $n+1$.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons que, pour tout entier naturel n non nul,

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3ᵉ : Un contre-exemple.

Nous considérons la proposition :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 9\,\text{divise}\,10^n+1.$$

Pour $n=0$, cette proposition est fausse donc cette dernière est fausse.

Cependant elle est héréditaire !

En effet, supposons que pour un entier naturel n fixé, $9\,\text{divise}\,10^n+1$.

Nous avons

$$\begin{aligned}10^{n+1}+1&=10^n\times(9+1)+1,\\&=10^n\times 9+10^n+1,\\&=10^n\times 9+k\times 9,\\&=(10^n+k)\times 9.\end{aligned}$$

Donc sous l'hypothèse ci-dessus, la propriété est héréditaire.

Nous retiendrons que l'étape d'initialisation est indissociable d'un raisonnement par récurrence.

Par contre la proposition :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 9\,\text{divise}\,10^n-1,\ \text{est vraie.}$$

1.3 Récurrences fortes

Proposition (récurrence d'ordre 2). *Soit $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n.*

Nous supposons que simultanément :

• *$P(0)$ et $P(1)$ vraies,*

• *pour un entier naturel $n\geq 1$ fixé, $P(n-1)$ et $P(n)$ vraies impliquent $P(n+1)$ vraie, alors*

$$\textit{quel que soit } n\in\mathbb{N}\ \textit{, la propriété } P(n) \textit{ est vraie.}$$

Démonstration. Considérons la propriété $Q(n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\text{"}P(n-1) \text{ et } P(n) \text{ vraies".}$$

$\triangleright$ $Q(1)$ est vraie car $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

$\triangleright$ On suppose que pour un entier naturel $n \geq 1$ fixé, $Q(n)$ est vraie, ce qui implique

$$P(n+1) \text{ vraie.}$$

Il en résulte que $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies, c'est-à-dire

$$Q(n+1) \text{ vraie.}$$

En appliquant le principe de récurrence, nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ Q(n) \text{ est vraie,}$$

ce qui signifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \text{"}P(n-1) \text{ et } P(n)\text{" sont vraies.}$$

Par suite, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Puisque $P(0)$ est vraie, nous obtenons finalement :

$$\text{Quel que soit } n \in \mathbb{N}, \text{ la propriété } P(n) \text{ est vraie.}$$

Remarque.
Ce théorème de récurrence forte est encore vrai à partir d'un rang n_0.

Exemple.
Nous considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et par la relation de récurrence double :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}.$$

Nous pouvons calculer directement les premiers termes de cette suite mais pour s'entraîner nous proposons un algorithme et son implémentation en Python de façon à conjecturer u_n en fonction de l'entier n.

$A \leftarrow 1$
$B \leftarrow 3$
Pour I allant de 2 à N
    $U \leftarrow 2 * B - A$
    $A \leftarrow B$
    $B \leftarrow U$
    Afficher U
Fin Pour

```python
n=int(input("n="))
a,b=1,3
L=[]
for i in range(2,n+1):
    u=2*b-a
    a,b=b,u
    L.append(u)
print(L)
```

Pour $n = 20$, nous obtenons

$$\boxed{[5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41]}.$$

Pour tout entier naturel n, nous conjecturons que $u_n = 2n + 1$.

Nous démontrons cette conjecture en appliquant la proposition de récurrence forte établie précédemment.

Initialisation

Nous avons

$$u_0 = 1 = 2 \times 0 + 1 \text{ et } u_1 = 3 = 2 \times 1 + 1,$$

ce qui prouve que l'égalité attendue est vraie au rang $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité

Nous supposons qu'aux rangs $n - 1$ et n avec $n \geq 1$, nous disposons des égalités :

$$u_n = 2n + 1 \text{ et } u_{n-1} = 2(n - 1) + 1 = 2n - 1.$$

Montrons que $u_{n+1} = 2(n + 1) + 1 = 2n + 3$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} = 2(2n + 1) - (2n - 1) = 2n + 3,$$

ce qui justifie que l'égalité attendue est vraie au rang $n + 1$.

Grâce au théorème de récurrence forte, nous en concluons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 2n + 1.$$