SAVOIRS

Thème 0 - Logique et raisonnement

[S0.1] Élement d'un ensemble

Soit X un ensemble. Si x est un élément de X, on dit que x appartient à X et on note $x \in X$. Si ce n'est pas le cas, on écrit $x \notin X$.

[S0.2] Les quantificateurs

Soit $P(x)$ une propriété qui dépend d'un élément x d'un ensemble X.
Si cette propriété est vraie pour tous les éléments de X, on écrit :

$$\forall x \in X, P(x).$$

S'il existe (au moins) un élément x_0 de X pour lequel cette propriété est vraie, on écrit :

$$\exists\, x_0 \in X, P(x_0).$$

[S0.3] Permutation de quantificateurs identiques

Soit $P(x, y)$ une propriété dépendant de deux éléments x et y appartenant respectivement à X et Y. Alors les phrases

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, P(x, y)$$

et

$$\forall y \in Y, \forall x \in X, P(x, y)$$

sont équivalentes : on ne change pas le sens en permutant deux quantificateurs identiques.

De même, les phrases

$$\exists x \in X, \exists y \in Y, P(x, y)$$

et

$$\exists y \in Y, \exists x \in X, P(x, y)$$

sont équivalentes.

[S0.4] Permutation de quantificateurs différents

Soit $P(x, y)$ une propriété dépendant de deux éléments x et y appartenant respectivement à X et Y. Alors, on change le sens en permutant deux quantificateurs différents. En effet, dans la phrase

$$\exists y \in Y, \forall x \in X, P(x, y),$$

il existe un élément y qui est valable pour tous les éléments x de X tandis que dans la phrase

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, P(x, y),$$

l'élément y qui existe pour tout élément x de X dépend de ce dernier (et peut donc être différent pour chaque élément x).

[S0.5] Négation d'une phrase mathématique

La négation d'une propriété P est la proposition qui a la valeur de vérité opposée à P, on la note non(P). On a donc :

$$P \text{ vraie } \iff \text{non}(P) \text{ fausse.}$$

La négation d'une phrase mathématique s'obtient en remplaçant « $\forall$ » par « $\exists$ » et « $\exists$ » par « $\forall$ » (en conservant l'ordre) et P par non(P).

[S0.6] Implication et condition nécessaire/suffisante

Soient P et Q deux propriétés. On dit que P implique Q et on note $P \Rightarrow Q$ si Q est vraie dès lors que P l'est. On dit alors que P est une condition suffisante de Q et Q est une condition nécessaire de P.

✓ Si on a $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$, alors $P \Rightarrow R$.

[S0.7] Contraposée d'une implication

Soient P et Q deux propriétés, alors la phrase

$$\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P),$$

est équivalente à :

$$P \Rightarrow Q.$$

On l'appelle contraposée.

[S0.8] Équivalence de deux propriétés

Soient P et Q deux propriétés. On dit que P et Q sont équivalentes et on note $P \iff Q$ si l'on a :

$$P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P.$$

La propriété P est alors une condition nécessaire et suffisante de Q (et de même pour Q). On dit que P est vraie si et seulement si Q est vraie.

✓ Si $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow P$, alors P, Q et R sont équivalentes.

Thème 1 - Calculs algébriques

[S1.1] Définition de famille

Soit I un ensemble fini. Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de complexes est une application de I dans $\mathbf{C}$ qui à un élément i de I associe a_i. On dit que a_i est l'élément d'indice i de la famille.

[S1.2] Définition de somme

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de nombres complexes. Alors $\sum\limits_{i\in I} a_i$ est la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Par convention, si $I = \emptyset$, alors $\sum\limits_{i\in I} a_i = 0$.

[S1.3] Définition du terme général

Étant donné une somme finie $\sum\limits_{i\in I} a_i$, on dit que a_i est le terme général de la somme.

[S1.4] Propriétés de la somme

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de complexes.
- $\sum\limits_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i\in I} a_i + \sum\limits_{i\in I} b_i$.
- $\sum\limits_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \sum\limits_{i\in I} a_i$.

[S1.5] Sommes particulières

Soient $a \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}^*$ et I une partie finie de $\mathbf{N}$.
- $\sum\limits_{i\in I} a = na$ avec n le nombre d'éléments de I.
- $\sum\limits_{k=n}^{m} k = \dfrac{(m+n)(m-n+1)}{2}$.
- $\sum\limits_{k=n}^{m} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors :

$$\sum_{k=n}^{m} u_k = \left(\frac{1-q^{m-n+1}}{1-q}\right) \times u_n, \text{ avec } n \leq m.$$

✓ Dans la formule de la somme géométrique, on remarque que u_n est le premier terme et $m-n+1$ est le nombre de termes de la somme.

[S1.6] Somme télescopique

Une somme est dite télescopique lorsque son terme général est de la forme

$$u_n = a_{n+1} - a_n.$$

On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0.$$

[S1.7] Factorisation de $a^n - b^n$

Soient $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ et $n \in \mathbf{N}^*$, alors :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}. \end{aligned}$$

[S1.8] Définition de sommes doubles

Soit (a_{ij}) une famille finie de complexes indexée par deux indices i et j variant dans deux ensembles I et J.
On appelle somme double la somme de tous les éléments de la famille. On la note :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij}.$$

On a :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij}.$$

[S1.9] Définition de produit

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie de nombres complexes ou réels. Alors $\prod_{i \in I} a_i$ est le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$.

Par convention, si $I = \emptyset$, alors $\prod_{i \in I} a_i = 1$.

[S1.10] Propriétés du produit

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles finies de scalaires.
– $\prod_{i \in I} (a_i b_i) = \prod_{i \in I} a_i \prod_{i \in I} b_i$.
– $\prod_{i \in I} \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i \in I} a_i$ où n désigne le nombre d'éléments de I.
En particulier, $\prod_{i \in I} a = a^n$ avec n le nombre d'éléments de I.

[S1.11] Produit télescopique

Un produit est dit télescopique si son terme général est de la forme $u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de $\mathbf{C}^*$. On a alors :

$$\prod_{k=0}^{n} u_k = \prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}.$$

[S1.12] Définition de la factorielle

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on appelle factorielle n, notée $n!$, l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Par convention, on a $0! = 1$.

[S1.13] Définition de coefficient binomial

On définit le coefficient binomial « k parmi n », noté $\binom{n}{k}$, comme l'entier

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

> ✓ Il ne parait pas évident que ce nombre est un entier. Ce sera plus clair quand nous l'interpréterons comme le nombre de sous-parties d'un ensemble dans le chapitre 13.

[S1.14] Propriétés des coefficients binomiaux

Soit $(n,k) \in (\mathbf{N})^2$ avec $k \leq n$. On a :
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (formule de Pascal).

[S1.15] Formule du binôme de Newton

Soient $(a,b) \in \mathbf{C}^2$ et $n \in \mathbf{N}$, alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Thème 2 - Ensembles et applications

[S2.1] Définition de l'appartenance

Soit E un ensemble. On dit que x est un élément de E lorsque x appartient à E. On note alors $x \in E$. Lorsque x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.

On appelle singleton un ensemble ne contenant qu'un élément.

On appelle ensemble vide l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$.

[S2.2] Définition de l'inclusion

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B lorsque tout élément de A est un élément de B. Autrement dit, on a :

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

On note alors $A \subset B$. On dit aussi que A est un sous-ensemble (ou une partie) de B. On note $\mathcal{P}(B)$ l'ensemble des parties d'un ensemble B.

Par convention, l'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles.

[S2.3] Transitivité de l'inclusion

Soient A, B et D trois sous-ensembles d'un ensemble E. Si $A \subset B$ et $B \subset D$ alors $A \subset D$.

[S2.4] Égalité de deux ensembles

Deux ensembles A et B sont égaux si $A \subset B$ et $B \subset A$. Autrement dit, on a :

$$x \in A \Longleftrightarrow x \in B.$$

On note alors $A = B$.

[S2.5] Définition de la réunion

Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On appelle réunion de A et B l'ensemble :

$$A \cup B = \{\, x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B \,\}.$$

[S2.6] Définition de l'intersection

Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On appelle intersection de A et B l'ensemble :

$$A \cap B = \{\, x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B \,\}.$$

[S2.7] Définition du complémentaire

Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble noté $\overline{A}$, A^c (ou encore $E \setminus A$ quand on veut préciser E), défini par :

$$\overline{A} = \{ x \in E \mid x \notin A \}.$$

[S2.8] Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F, l'ensemble

$$E \times F = \{ (x, y) \mid x \in E, y \in F \}.$$

[S2.9] Produit de n ensembles

Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles. On appelle n-uplets la donnée ordonnée de n éléments $x_1, \dots, x_n$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E_i$. L'ensemble de ces n-uplets est appelé produit cartésien de $E_1, \dots, E_n$ et noté $E_1 \times \ldots \times E_n$.
Si E est un ensemble, on note E^n l'ensemble des n-uplets d'éléments de E.

[S2.10] Définition d'application

Une application (ou fonction) f est la donnée
– d'un ensemble de départ (ou de définition) E,
– d'un ensemble d'arrivée F,
– et, pour tout x de E, d'un unique élément de F, noté $f(x)$.
On écrit :

$$f : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto f(x)$$

ou

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.

[S2.11] Égalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont égales si elles ont même espace de départ, même espace d'arrivée et, pour tout élément x de l'espace de départ, $f(x) = g(x)$.

[S2.12] Définition d'antécédent

Soient f une application de E dans F et y un élément de F. On dit que x est un antécédent de y par f si $f(x) = y$.

✓ Un élément de F n'admet pas nécessairement un antécédent par f.