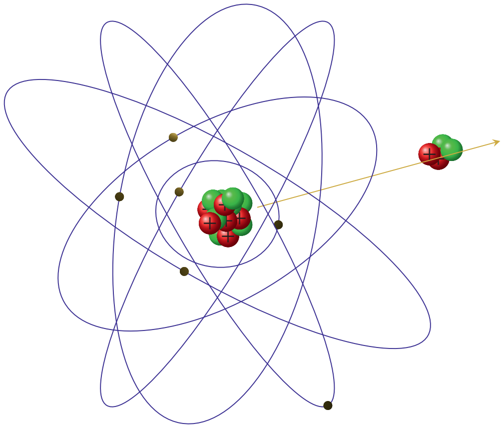
Chapitre 1

Suites numériques

Cours complet

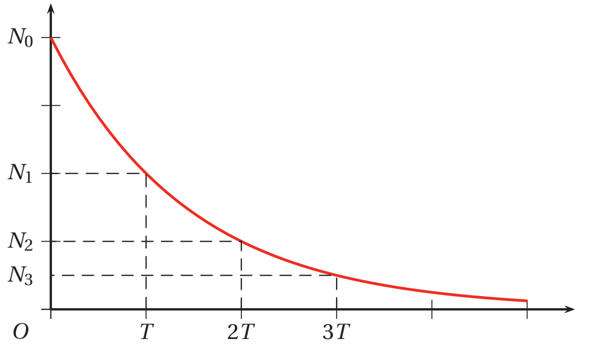
1. Introduction

1.1 La décroissance radioactive



Certains noyaux d'atomes sont instables car ils contiennent trop de protons, trop de neutrons ou trop des deux. Pour revenir vers un état stable, ils sont obligés de se transformer. Ils expulsent alors de l'énergie sous forme de rayonnements et de particules : c'est ce qu'on appelle « radioactivité » .
Par exemple l'uranium 238 tend à se transformer en plomb 206 qui, lui, est stable. La « désintégration » est la transformation irréversible d'un noyau radioactif en un autre noyau.
Au fur et à mesure que les noyaux se désintègrent la radioactivité diminue. Si le nombre initial de noyaux est N_0 alors, au bout d'un temps quasi constant T, propre à chaque élément et appelé « période radioactive » ou « demi-vie » , ce nombre de noyaux radioactifs a été divisé par deux. Après $2T$, il n'en reste qu'un quart, après $3T$, un huitième, etc. C'est-à-dire que $N_1 = \frac{1}{2}N_0$, $N_2 = \frac{1}{2}N_1$, $N_3 = \frac{1}{2}N_2$, etc. Ce que l'on peut, en notant N_i le nombre de noyaux radioactifs après i demi vies, écrire

$$N_{n+1} = \frac{1}{2}N_n, \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}.$$



Le césium 137, est l'un des isotopes du césium. En se désintégrant, il donne du baryum 137 en émettant d'abord un rayonnement β^- puis un rayonnement γ :

$$^{137}_{55}\mathrm{Cs} \xrightarrow[\beta^-\ 512{,}0\ \mathrm{keV}]{30{,}15\ \mathrm{ans}} {}^{137m}_{56}\mathrm{Ba} \xrightarrow[\gamma\ 661{,}7\ \mathrm{keV}]{2{,}552\ \mathrm{min}} {}^{137}_{56}\mathrm{Ba}.$$

Sa demi-vie étant de 30,15 ans, on peut se demander combien de temps il faut pour qu'une quantité N_0 de noyaux se soient désintégrés à 99,99%.
On cherche donc l'entier naturel n le plus petit possible tel que $N_n \leq 0{,}0001 N_0$. On part donc de N_0 et on multiplie par $\frac{1}{2}$ jusqu'à ce que le résultat obtenu soit inférieur ou égal à $0{,}0001 N_0$:

$$N_0 \mapsto N_1 = \frac{1}{2}N_0 \mapsto N_2 = \frac{1}{2^2}N_0 \mapsto \ldots \mapsto N_n = \frac{1}{2^n}N_0 \leq 0{,}0001 N_0.$$

On voit qu'il suffit de déterminer l'entier naturel n le plus petit possible tel que $\frac{1}{2^n} \leq 0{,}0001$. Un petit programme en Python fait l'affaire :

```python
n=0
while (1/2)**n>0.0001:
    n=n+1
print(n)
```

On trouve $n = 14$. C'est-à-dire que 99,99% des noyaux radioactifs du césium auront disparu au bout de $14 \times 30 = 420$ ans.
On peut trouver cela long, mais que dire par exemple de l'uranium 238 avec une demi-vie d'environ $4{,}5 \times 10^9$ années, soit à peu près l'âge de la Terre ?

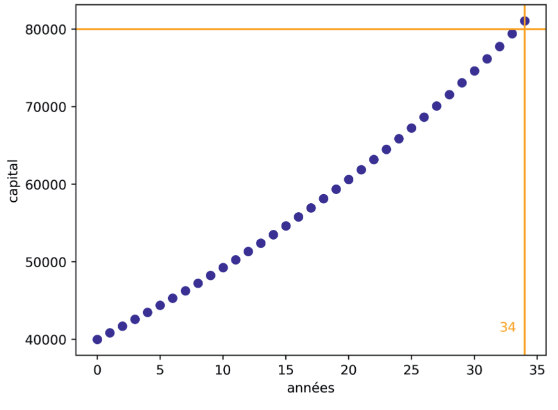
1.2 Intérêts composés

1. Un particulier dépose sur un compte bancaire rémunéré au taux de $2{,}1\%$ par an une somme $S_0 = 40000$€. Combien d'années au minimum doit-il laisser son argent en banque s'il veut doubler son dépôt initial ?

2. Malheureusement la banque lui apprend que des frais de gestion, s'élevant à $0{,}005 S_0 = 200$€, doivent être déduits chaque année. Combien de temps au minimum doit-il laisser son argent en banque s'il veut doubler son dépôt initial ?

1. Dans la première situation les montants annuels successifs du capital sont S_0, $S_1 = S_0\left(1+\frac{2,1}{100}\right) = 1,021S_0$, $S_2 = 1,021S_1$, etc. D'une manière générale $S_{n+1} = 1,021S_n$, il s'agit donc d'une suite géométrique de raison 1,021. On en tire $S_n = 1,021^n S_0$. On cherche l'entier naturel le plus petit possible tel que $S_n \geq 2S_0$. Ceci équivaut à $1,021^n S_0 \geq 2S_0$ donc à $1,021^n \geq 2$. Il faut ici remarquer que le capital initial n'intervient pas dans cette dernière inégalité : le temps nécessaire pour doubler le capital est donc indépendant du montant initial de celui-ci.
Une méthode de résolution exacte sera vue plus tard, pour le moment on peut utiliser un programme en Python.

```python
n=0
while 1.021**n < 2:
    n=n+1
print(n)
```



On trouve $n = 34$.

Exercice 1.1

Combien faut-il d'années pour tripler le capital initial dans cette première situation ?

2. Dans la seconde situation les montants annuels successifs du capital sont S_0, $S_1 = 1,021S_0 - 0,05S_0$, $S_2 = 1,021S_1 - 0,05S_0$, etc.

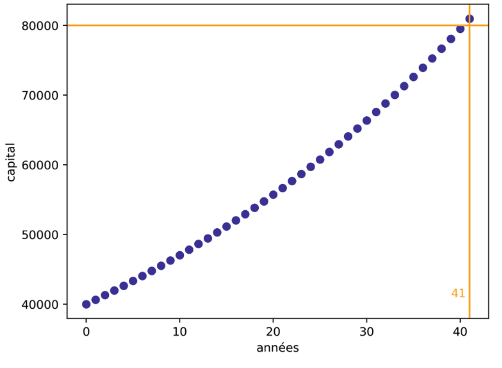
On a maintenant d'une manière générale $S_n = 1,021S_{n-1} - 0,005S_0 = 1,0215S_{n-1} - 200$ et l'on cherche le « premier » $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n \geq 2S_0$. On utilise le programme en Python suivant :

```python
n=0
S=40000
while S < 2*40000:
    S=1.021*S-200
    n=n+1
print(n)
```

On trouve $n = 41$.

Commentaires du programme :

1	On initialise l'année.
2	On initialise le capital.
3	Tant que le capital n'a pas atteint la valeur requise, on continue.
4	On calcule le capital de l'année suivante.
5	On avance d'une année.
6	On affiche le résultat.



2. Définitions

Définition 1.1 – Suite réelle

Une suite réelle u est une fonction de $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, elle associe à chaque entier n un réel noté $u(n)$ ou plus couramment u_n.

- C'est donc une liste de termes : u_0, u_1, u_2, etc.
- Une suite peut être finie ou infinie.
- Si l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$ alors u_0 désigne le premier terme, u_2 le troisième terme, u_n un terme quelconque. Les termes sont juste des réels.
- On dit que 0 est l'indice de u_0, 1 est l'indice de u_1 et n est l'indice de u_n.
- Il est courant qu'une suite ne commence pas à l'indice 0. Elle peut par exemple n'être définie que à partir de l'indice 3. Dans ce cas le premier terme sera u_3, le deuxième u_4, etc.
- Quant à la suite elle-même on la note u, (u_n), ou encore, par exemple, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque l'on veut préciser l'ensemble des indices.

- Il ne faut pas confondre u_n qui est un terme de la suite, c'est-à-dire un nombre réel, avec (u_n) qui est une suite, c'est-à-dire une liste de nombres réels, souvent infinie.

Considérons quelques suites :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (0,1,2,3,4,5,6,\dots),\\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (4,13,22,31,40,\dots),\\ (w_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (1,2,5,26,676,\dots),\\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (7,-1,6,5,11,16,\dots).\end{aligned}$$

Si pour certaines suites, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il est facile de prédire quels sont les termes suivants, cela n'est plus vrai pour les suivantes. Il faut donc recourir à des procédés autres que l'énumération de quelques premiers termes pour définir une suite. Il existe principalement deux manières de le faire : on peut définir une suite ou bien comme on le fait pour une fonction, ou bien par récurrence.

Définition comme une fonction ou définition explicite : on explique comment déterminer un terme u_n **en fonction de l'indice n**, exactement comme lorsque pour définir une fonction f on donne la formule de $f(x)$ en fonction de la variable x. Par exemple on écrira « la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = 4+9n$ ».

Définition par récurrence : on donne le ou les premiers termes ainsi qu'une règle qui permet de calculer un terme quelconque **en fonction de celui ou de ceux qui le précèdent**. Par exemple la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $w_0 = 1$ et $\forall \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n^2+1$ ou la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_0 = 7$, $x_1 = -1$ et $\forall \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.

Définition 1.2 – Fonction associée

Lorsqu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie comme une fonction de l'indice n et s'il existe une fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $u_n = f(n)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, alors cette fonction f est appelée fonction associée à la suite.

Remarque 1.1

Si, par exemple, la suite (u_n) n'est définie qu'à partir de l'indice 5, c'est-à-dire si elle commence à u_5, alors la fonction associée, si elle existe, sera définie sur $[5,+\infty[$.

Dans la définition d'une suite (u_n) de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, la fonction f **n'est pas** la fonction associée à la suite. Il faut bien distinguer $f(n)$ d'avec $f(u_n)$.

Exemples

terme de la suite	expression de la fonction associée
$u_n = \dfrac{1+n}{1+n^2}$	$f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$
$u_n = \sqrt{1+n^2+n^3}$	$f(x) = \sqrt{1+x^2+x^3}$
$u_n = \dfrac{1+\sin^2(n)}{4+\sin\left(n^2\right)}$	$f(x) = \dfrac{1+\sin^2(x)}{4+\sin\left(x^2\right)}$
$u_n = (n+2)\cos(1+7\pi n)$	$f(x) = (x+2)\cos(1+7\pi x)$

Méthode 1.1 – Calcul des termes d'une suite définie par récurrence

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -2$ et $\forall \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 2$ et calculons ses premiers termes.

- u_0 est donné, c'est -2.
- Pour calculer u_1 on remplace n dans la formule de récurrence par 0, cela donne
$$u_{0+1} = \frac{2}{3}u_0 + 2.$$
On y remplace u_0 par sa valeur -2 pour obtenir
$$u_1 = \frac{2}{3}(-2) + 2 = \frac{2}{3}.$$
- Pour calculer u_2 on remplace n par 1, cela donne $u_{1+1} = \frac{2}{3}u_1 + 2$.
Soit $u_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + 2 = \frac{22}{9}$.
- Pour calculer u_3 on remplace n par 2, cela donne $u_{2+1} = \frac{2}{3}u_2 + 2$.
Soit $u_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{22}{9} + 2 = \frac{98}{27}$.
- Etc.

Exercice 1.2

Déterminer les cinq premiers termes de chacune des suites suivantes :

1. La suite u de terme initial 2 et satisfaisant $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La suite u satisfaisant $u_n = n - n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite u de termes initiaux $u_0 = -2$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et telle que $u_{n+3} = u_n u_{n+1} + u_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. $u : \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + \frac{7}{2}. \end{cases}$

5. $u : \begin{cases} u_0 = 3, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + n^2. \end{cases}$

Il serait faux de croire qu'il existe deux sortes de suites : celles qui sont définies comme des fonctions et celles qui sont définies par récurrence. Une même suite peut a priori être définie des deux façons.

Exemple

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = n^2 + 1$ peut également être définie par récurrence comme la suite de termes initiaux $v_0 = 1$ et $v_1 = 2$ qui satisfait $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On peut vérifier que ces deux définitions coïncident sur les premiers termes : 1, 2, 5, 10, 17, etc. On verra plus loin comment on peut démontrer une telle égalité entre suites, c'est-à-dire pour **tous** les termes, de manière rigoureuse.

Exercice 1.3

Soit quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ respectivement définies par

$$u_n = \frac{7}{8}n^2, \qquad v_n = 3n+4, \qquad w_n = \frac{2}{n} \quad \text{et} \quad x_n = \frac{n^2-3}{(n+1)^2}.$$

Calculer :

1. Donner les quatre premiers termes de chaque suite.
2. u_{10+1} et $u_{10} + 1$,
3. x_{11+20} et $x_{11} + 20$,
4. $x_{11\times 2}$ et $x_{11} \times 2$,
5. w_{3^3} et w_3^3,
6. u_{1000}, v_{1000} et x_{1000},
7. w_{v_3}, v_{u_8}, et u_{w_2},
8. $w_{(u_8)^2}$ et $\left(w_{u_8}\right)^2$.

On ne peut utiliser le terme d'une suite comme indice d'une autre suite que si ce terme est un entier naturel.

Exercice 1.4

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $v_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + \frac{2}{3}$. Trouver sa définition comme fonction de l'indice n.

Pour une suite ayant une infinité de termes, certaines questions se posent assez naturellement :

- Comment calculer un terme quelconque, par exemple u_{86421} le plus efficacement possible ?