Chapitre 1

MÉTHODES DE RAISONNEMENT ET CALCULS (ECG-1)

Comme la cuisine, les mathématiques ne peuvent pas se pratiquer sans de bons ustensiles (en l'occurrence les différentes techniques de raisonnement, et les calculs, qui constituent l'essentiel de tout exercice mathématique au sens large). Comme la bonne cuisine, les mathématiques ont leurs ingrédients de base, les indispensables : les ensembles de nombres, en particulier les nombres entiers et les nombres réels.

Ce premier chapitre a pour but de présenter les différents modes de raisonnement mathématique, en les réorganisant dans un souci d'efficacité optimale. Après cela, vous serez parés pour les premières recettes de cuisine à proprement parler.

1 Méthodes de raisonnement

Les méthodes de raisonnement sont nombreuses. Il n'en reste pas moins que quatre d'entre elles reviennent plus fréquemment que d'autres. Nous nous proposons de les passer en revue dès maintenant.

MÉTHODE 1 : Le raisonnement par récurrence

■ Principe

Le raisonnement par récurrence est le raisonnement par excellence faisant intervenir les entiers naturels.

L'idée générale est simple : pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à un entier n_0, on vérifie qu'elle est héréditaire (c'est-à-dire que si elle est vraie pour un entier quelconque alors elle est vraie pour son suivant). Il suffit alors qu'elle soit vraie pour l'entier n_0 pour en déduire qu'elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0.

On peut en fait raffiner un tout petit peu. Il y a plusieurs variantes :

— la récurrence faible : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et :

$$\forall n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1);$$

— la récurrence double : $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies et :

$$\forall n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+2);$$

— la récurrence forte : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et :

$$\forall n \geq n_0, \quad \big(\forall k \leq n, \mathcal{P}(k)\big) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1).$$

La récurrence faible correspond à la situation que l'on avait décrite plus haut. C'est de loin la plus fréquente. Il faut toutefois penser au raisonnement par récurrence double notamment lorsque l'on étudie des suites définies par un récurrence d'ordre 2 (voir chapitre 9).

■ **Exemple 1** : Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ est une suite croissante.

Comme $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de montrer que tous les termes de la suite sont positifs. Cela semble évident puisque les deux premiers termes sont positifs et chaque nouveau terme peut s'écrire comme somme de termes qui le précède... mais soyons rigoureux et raisonnons par récurrence double.

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « le terme u_n est positif ».

Les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies car $u_0 = u_1 = 1 \geq 0$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies alors u_n et u_{n+1} sont positifs. Donc $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est positif. Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

On a ainsi montré par récurrence que la suite (u_n) est positive.

Donc $u_{n+1} - u_n = u_{n-1} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (u_n) est donc croissante.

■ Erreurs classiques

Il y a trois erreurs fréquemment commises dans les récurrences.

On ne démontre que l'hérédité sans vérifier que la propriété est vraie pour $n = 0$ ou $n = 1$. Donc on ne prouve absolument pas que la propriété est vraie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$.

Dans le cours de la démonstration, on utilise non pas l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ mais $\mathcal{P}(n+1)$, le résultat de ce que l'on cherche à démontrer. Autant dire que l'on tourne en rond et que l'on ne démontre rien !

Lorsque vous démontrez $\mathcal{P}(n+1)$ sans vous servir de $\mathcal{P}(n)$ cela signifie qu'il n'y avait pas lieu d'effectuer un raisonnement par récurrence. Un raisonnement direct permettait de conclure ! Il vaut mieux reprendre le raisonnement au début. Ce n'est pas une erreur à proprement parler mais pour le moins une maladresse.

■ Mise en garde

Il ne faut pas mépriser les petites valeurs de n sous prétexte que la vérification de $\mathcal{P}(n)$ serait alors triviale. On entend trop souvent des candidats dire : « pour $n = 0$ et $n = 1$ c'est évident » et se tenir lâchement pour quitte de la vérification attendue. Or c'est grave !

D'une part la vérification peut parfaitement être délicate. D'autre part la logique du raisonnement est alors faussée. Enfin, les problèmes qui se posent pour les petites valeurs de n sont probablement les mêmes que pour les grandes valeurs, sauf que les calculs sont plus simples !

■ Cas d'utilisation

Dès que l'on demande de démontrer une propriété qui commence par : « pour tout entier $n, \ldots$ », il faut penser au raisonnement de récurrence. Mais attention de ne pas en abuser quand même ! Il faut qu'il y ait une relation « simple » entre la propriété au rang n et la propriété au rang $n+1$.

Par exemple, raisonner par récurrence pour montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) - \ln n \geq \frac{1}{n}$$

est une très mauvaise idée !

Voici un catalogue de situations où les récurrences interviennent :

- suites et séries : preuve de monotonie, recherche d'encadrements ;
- fonctions : preuve des propriétés sur les dérivées successives (fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$) ;
- intégration : formules de récurrence par intégration par parties ;
- polynômes : récurrences sur le degré, passage de n à $n+1$ par intégration ;
- ensembles : récurrence sur le cardinal ;
- espaces vectoriels et matrices : récurrence sur la dimension, utilisation des supplémentaires et des propriétés de stabilité ;
- probabilité : étude de phénomènes évolutifs, par exemple urnes (tirages sans remise), chaînes de Markov.

➤ On trouvera de multiples exemples de ces récurrences dans les chapitres concernés.

MÉTHODE 2 : Raisonnement par l'absurde et contraposition

Ces deux raisonnements servent à montrer une implication entre deux propositions, de la forme : prouver que $A \Longrightarrow B$.

Il faut faire la différence du point de vue logique entre ces deux raisonnements.

Dans le raisonnement par l'absurde, on suppose que l'on a à la fois A et [non B]. On cherche alors à aboutir à une contradiction.

■ **Exemple 2 :** Montrer qu'une fonction continue qui ne s'annule pas sur un intervalle est de signe constant.

Si f n'était pas de signe constant alors elle changerait de signe, donc prendrait des valeurs positives et négatives. Or une fonction continue qui prend des valeurs positives et négatives s'annule, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (voir le chapitre 11). Ceci est en contradiction avec l'hypothèse de départ.

Dans le raisonnement par contraposition, on cherche à démontrer que : (non B) implique (non A).

■ **Exemple 3 :** Reprendre l'exemple précédent en raisonnant par contraposée.

Supposons que f ne soit pas de signe constant (non B). Donc elle change de signe. Comme elle est continue, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule (non A).

REMARQUE : *On voit bien sur cet exemple que la différence entre les deux modes est subtile. La raisonnement par contraposée est préférable et rares sont les cas où le raisonnement par l'absurde est vraiment indispensable.*

Il faut être précis dans la rédaction sinon c'est assez peu clair...

Pensez à la contraposée puis au raisonnement par l'absurde, à chaque fois que vous n'arrivez pas à faire un raisonnement direct.

MÉTHODE 3 : Raisonnement par équivalence

■ Cas d'utilisation

On raisonne par équivalence essentiellement pour résoudre des équations, des inéquations, des systèmes d'équations linéaires.

Dans les autres cas, souvent on raisonne en deux temps, en prouvant une implication puis l'implication réciproque, quitte à s'apercevoir qu'il suffit de remonter la chaîne des raisonnements.

Lorsque l'on vous demande d'établir l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

$$(i) \Longleftrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii)$$

Il n'est pas nécessaire de démontrer toutes les équivalences ! La bonne méthode est de partir d'un bout, et d'essayer d'y revenir en passant par toutes les propositions (ce que l'on appelle faire une preuve cyclique). Ainsi, il est suffisant de montrer que par exemple :

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (i)$$

Dans le cas où, naturellement, cet enchaînement est aisé à prouver. Sinon on en cherche un autre !

■ *Le conseil du professeur*

Sur les deux sens d'une équivalence, l'un est généralement plus simple à établir que l'autre. À vous de trouver lequel et si la réciproque vous résiste, pensez raisonner par contraposée ou par l'absurde (voir la méthode 2).

Lorsque l'on demande de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une propriété soit vérifiée, commencez par raisonner par implications, en regardant ce qu'entraînent les hypothèses qui sont faites. Notez l'ensemble de ces conséquences et essayez d'en faire une synthèse complète.

Ensuite, essayez de voir si vous pouvez remonter de ces conséquences vers les hypothèses de départ.

REMARQUE : *Une situation trompeuse est généralement mal interprétée par les candidats est celle où l'on demande de montrer :*

« Prouver que les éléments de E sont les fonctions telles que... »

Il s'agit en fait d'une équivalence. Il faut montrer que :

- *— les éléments de E sont des fonctions telles que...*
- *— les fonctions telles que... sont effectivement des éléments de E.*

Il n'est pas rare que les candidats oublient l'une des deux implications.

■ Mise en garde

Les examinateurs des examens oraux sont décidément très à cheval sur les principes linguistiques et ne tolèrent pas le moindre lapsus. Tels des Freud qui s'ignorent, ils en déduisent des interprétations sur votre niveau.

Bref, lorsqu'au cours d'un exposé oral, vous dites : « il faut montrer *ceci* » assurez-vous que vous n'êtes pas en train de penser : « si j'arrive à montrer *ceci* alors je pourrai en conclure *cela* » qui se traduit par : « il suffit de montrer *ceci* »

En français, on ne fait pas toujours la différence. Elle existe pourtant en maths. Et à l'oral des concours, vous faites des maths !

MÉTHODE 4 : Preuve d'existence et d'unicité

■ *Le conseil du professeur*

Il y a deux règles d'or à respecter (au moins au début), si vous voulez parvenir au but sans encombres :

1. Séparer la preuve de l'existence de celle de l'unicité.
2. Commencer par prouver qu'il y a unicité de l'objet (c'est souvent plus simple et ça peut donner des idées pour attaquer le problème de l'existence).

■ Principe

Pour prouver qu'une chose est unique, il y a essentiellement deux façons de faire.

La première façon est d'appliquer une propriété ou un résultat du cours. Certains théorèmes énoncent (l'existence et) l'unicité d'un élément. Il suffit d'y recourir pour conclure.

Si l'élément à étudier est un réel qui peut être relié à une fonction strictement monotone, il y a fort à parier que l'unicité résulte de l'étude de la fonction.

Si l'élément à étudier est un vecteur qui peut être relié à un endomorphisme, on montre que le noyau de cet endomorphisme est réduit à son vecteur nul.

Si l'élément à étudier est nécessairement solution d'un système linéaire, et qu'en plus ce système est de Cramer (voir le chapitre sur le pivot de Gauss), alors il n'y a plus qu'un choix possible.

L'autre façon consiste à considérer deux éléments qui satisfont à la condition requise. Le but est de montrer qu'ils sont égaux. Généralement, s'il s'agit de réels ou de vecteurs, cela se fait en étudiant la différence entre ces deux éléments et en montrant qu'elle est forcément nulle.

Signalons à ce propos certaines techniques pour montrer qu'un objet est nul :

— si a et b sont deux réels positifs tels que $a + b = 0$ alors $a = b = 0$;

— si l'on sait que $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et que f est continue, on en déduit instantanément que f est nulle sur l'intervalle $[a, b]$ (voir chapitre 14) ;

— pour montrer qu'un vecteur est nul dans un espace euclidien, le principe consiste à établir que le carré de la norme de ce vecteur est nul (voir chapitre 8 méthode 4).

L'existence se prouve soit en construisant l'élément dont on parle, en l'exhibant complètement (preuve directe ou preuve constructive) soit en démontrant indirectement qu'il existe, en déduisant son existence d'autres résultats (preuve indirecte ou preuve déductive).

On construit l'élément vérifiant les conditions imposées en l'exhibant sous forme d'une formule explicite. La preuve de la non-multiplicité aura peut-être permis de deviner cet élément, ou au moins en aura donné une idée.

Plusieurs théorèmes assurent l'existence d'un élément satisfaisant un certain nombre de conditions prédéfinies (par exemple le théorème de Rolle et le théorème des valeurs intermédiaires). Cependant, ils ne donnent pas explicitement l'élément en question. On sait qu'il existe, mais on ne sait pas trop quelle tête il a (mais on s'en fiche complètement, en règle générale).

REMARQUE : *Il peut se faire que vous n'arriviez pas à prouver, dans un premier temps, l'unicité. Ce n'est pas forcément grave, au moins arriverez-vous à dire : « si le problème a des solutions, elles ont telles caractéristiques ». Il suffit alors de considérer tous les cas restants un par un et regarder s'ils sont solutions du problème. C'est ce que l'on appelle : raisonner par analyse-synthèse.*

2 Savoir faire des calculs

On ne peut pas faire de mathématiques, sans maitriser les bases élémentaires du calcul. Évidemment, tout le monde peut se tromper. Résoudre un système linéaire ou faire une intégration par parties, n'est simple pour personne. Cela demande du savoir-faire et de la concentration.

Pour mener à bien un calcul, il faut connaître les formules bien sûr mais cela ne suffit pas. Il faut s'entraîner. Plus vous ferez de calculs pendant vos années de préparation, moins vous ferez d'erreurs.

Malgré tous vos efforts, il vous arrivera encore d'en faire de temps à autre. Il faut donc penser à contrôler la cohérence de vos résultats et à vérifier rapidement vos lignes de calcul. La tâche sera d'autant plus facile que les calculs sont soignés et présentés avec rigueur.

Voici quelques commentaires émanant d'examinateurs de concours à propos des calculs.

— « Il est surprenant que le calcul de la dérivée ou d'une primitive de la fonction $t \longmapsto (at+b)^n$, surtout avec $n = -1$, pose autant de problèmes. »
— « Développer $\cos(a+b)$, mettre $x^2 + 2x - 1$ sous forme canonique, sont des questions qu'il vaudrait mieux éviter de poser ».
— « On calcule $\sin(x+\pi)$ à partir de la formule donnant $\sin(a+b)$, et on développe $(a+b)^3$ en l'écrivant sous la forme $(a+b)(a+b)^2 \dots$ »

Ces constatations amènent lesdits examinateurs à conclure que le nombre de candidats capables de mener à bien un calcul n'est que très légèrement supérieur au nombre de places offertes.

Même si cela est certainement un peu exagéré, il n'en reste pas moins que le calcul est souvent un point faible des candidats. Et que, généralement, on peut dire qu'un candidat qui sait faire des calculs intelligemment est un bon candidat.

Suivez-donc ces quelques recettes élémentaires avant de vous lancer dans des pages de calculs interminables.

Apprenez par cœur (mais vraiment par cœur) :

— les identités remarquables classiques ;
— les formules de dénombrement usuelles ;

— les formules de base du calcul intégral ;
— les résultats concernant les lois de probabilité classiques ;
— les formules de trigonométrie indispensables ;

Récitez-les de temps en temps par écrit sinon vous aurez l'impression (à tort) de les connaître.

➤ Voir les formulaires pages suivantes.

Entraînez-vous à manipuler des sommes formelles et les changements d'indice et sachez également intervertir des sommes si besoin est.

■ **Exemple 4 :**

Développer un produit de deux sommes : $\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$.

Effectuer un décalage d'indice : $\sum_{i=1}^{n} a_{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

Inverser l'ordre de sommation : $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Inverser des indices de sommation : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}$ car $0 \leq i \leq j \leq n$.

Conduisez vos calculs intelligemment, en sachant où vous allez : ordonnez les termes selon les puissances croissantes ; regroupez les termes analogues, simplifiez « sur place ». N'oubliez jamais que recopier une ligne, c'est risquer de faire une erreur supplémentaire.

■ **Exemple 5 :** Pour développer $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ on peut commencer par faire apparaître une identité remarquable :

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)(x^2-x+1) &= ((x^2+1)+x)(x^2+1)-x) \\ &= (x^2+1)^2 - x^2 \\ &= (x^4+2x^2+1) - x^2 \\ &= x^4 + x^2 + 1\end{aligned}$$

Utilisez les symétries des calculs et n'hésitez pas à définir des procédures de calcul : cela vous évitera de faire plusieurs fois la même chose !

■ **Exemple 6 :** Une fois que l'on a développé $(a+2b)^2$, le développement de $(2a+b)^2$ est immédiat : il suffit d'inverser a et b !

$$\begin{aligned}(a+2b)^2 &= a^2 + 8ab + 4b^2 \\ (2a+b)^2 &= b^2 + 8ab + 4a^2\end{aligned}$$

Sachez transformer une expression.

■ **Exemple 7 :**
Pensez systématiquement à factoriser :

$$(a+b)^2 - c^2 = (a+b-c)(a+b+c)$$

Pour primitiver la fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ pensez à la transformation :

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

Pour faire une étude de signe, pensez à réduire une fraction au même dénominateur en choisissant le dénominateur le plus simple possible :

$$\frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{2x-3}{x(x-1)(x-3)}$$

Formulaire

■ Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a^n + na^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \cdots + b^n$$

Le coefficient $\dbinom{n}{k}$ se lit k-parmi-n.

■ Avec les coefficients binomiaux

La formule explicite : $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

La symétrie : $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$

La formule du triangle de Pascal : $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k} + \dbinom{n-1}{k-1}$ si $1 \leq k \leq n$.

La formule du pion : $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ si $1 \leq k \leq n$.

Formule des colonnes : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ si $0 \leq p \leq n$.

Les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et, si $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$