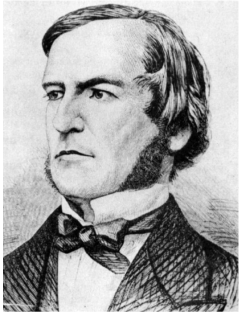
Chapitre 1

Raisonnements mathématiques

UN MATHÉMATICIEN



Né dans une famille de commerçants, **George Boole** est un parfait autodidacte. Il apprend seul le latin et le grec et lit avec passion les textes de grands mathématiciens tels Joseph Lagrange et Pierre-Simon Laplace. Dans sa principale publication, *An investigation into the Laws of Thought*, publié en 1854, il innove en fondant sur des bases mathématiques le raisonnement logique, jusque-là considéré comme une branche de la philosophie.

Un peu d'histoire

On considère les Grecs anciens comme les fondateurs des mathématiques car les premiers, ils ont eu le souci de justifier leurs résultats par des démonstrations. Des philosophes comme Aristote ou les Stoïciens ont même réfléchi à la notion de raisonnement.

Au milieu du XIX^e, les mathématiciens anglais George Boole et Augustus De Morgan s'intéressent au raisonnement logique en tant que tel. Le premier définit des opérations logiques telles la négation d'une proposition, la conjonction ou la disjonction de deux d'entre elles. Le second, s'inspirant d'Aristote, introduit la notion de quantificateur.

Au tournant du XX^e siècle, des mathématiciens comme Giuseppe Peano ou Bertrand Russell utilisent le langage de la théorie des ensembles pour fonder le raisonnement mathématique sur des bases solides.

Objectifs

les incontournables

- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.
- ▷ Savoir utiliser un raisonnement par récurrence d'ordre supérieur ou égal à 2.
- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence forte (ou généralisée).
- ▷ Savoir mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.

et plus si affinités

- ▷ Savoir raisonner par contraposée.
- ▷ Savoir manipuler les connecteurs logiques et les quantificateurs.
- ▷ Savoir écrire la négation d'une proposition.

Résumé de cours

Les éléments du raisonnement

Proposition

Définition 1.1. — On appelle proposition toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable x, nous pourrons la noter $\mathcal{P}(x)$.

Remarque 1.1. — On écrira indifféremment " $\mathcal{P}$ " ou " $\mathcal{P}$ est vraie ".

Exemple 1.1. — Pour tout réel x strictement positif, "$\ln(x) > 0$" est une proposition dépendante de la variable x. Elle est vraie si $x > 1$, et fausse sinon.

Exemple 1.2. — "*La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante*" est une proposition (qui ne dépend pas de l'entier n).

Exemple 1.3. — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.

Exemple 1.4. — Pour tout réel x, " $(2x+1)e^{-x}$ " n'est pas une proposition.

Quantificateurs

Notation 1.1 — Le signe " $\forall$ " placé devant une variable x signifie "*quel que soit x...*".
Le signe " $\exists$ " placé devant une variable x signifie "*il existe (au moins) un x...*".
Le signe " $\exists!$ " placé devant une variable x signifie "*il existe un unique x...*".

" $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1>0$ " se lit : "quel que soit le réel x, x^2+1 est strictement positif" ou "pour tout réel x, x^2+1 est strictement positif".

" $\exists x \in\ ]0,+\infty[,\ x^2-6x+1=0$ " se lit : "il existe au moins un réel x strictement positif tel que x^2-6x+1 est égal à 0" (il y a d'ailleurs deux tels x : $3+2\sqrt{2}$ et $3-2\sqrt{2}$).

" $\exists! n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n(n+1)}{2}=3$ " se lit : "il existe un unique entier naturel n non nul tel que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3" (il s'agit du nombre 2).

Remarque 1.2. — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un x*" signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

Propriété 1.1. — En général, la proposition $\big(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x,y)\big)$ est différente de $\big(\exists y, \forall x, \mathcal{P}(x,y)\big)$.

Exemple 1.5. — La proposition " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \le x < n+1$ " énonce que, quel que soit le réel x, il existe un entier n, tel que x soit compris entre n et $n+1$, cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière de x). Elle est différente de la suivante : " $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \le x < n+1$ " qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

Remarque 1.3. — Dans l'expression "$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \dots$", il faut noter que x dépend de y, on devrait en toute rigueur le noter x_y ou $x(y)$, ce que l'on ne fait presque jamais.

❑ Connecteurs logiques

Définition 1.2. — La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée non$\mathcal{P}$ et appelée *négation* de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Propriété 1.2. — La négation de $\left(\forall x, \mathcal{P}(x)\right)$ est la proposition $\left(\exists x, \text{non}\,\mathcal{P}(x)\right)$.
La négation de $\left(\exists x, \mathcal{P}(x)\right)$ est la proposition $\left(\forall x, \text{non}\,\mathcal{P}(x)\right)$.

Exemples 1.6. — Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "*les trois numéros obtenus sont pairs*" est "*au moins un des numéros obtenus est impair*".
La négation de "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$" est : "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, x < n$ ou $x \geq n+1$".
La première proposition est vraie puisqu'elle définit l'entier n qui est la partie entière de x (voir **exemple 1.5**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel x tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle $\left]x-1, x\right]$.

Définition 1.3. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{Q}$, soit les deux).
Exemple 1.7. — Pour un dé lancé, on considère $\mathcal{P}$: "*le numéro sorti est pair*", et $\mathcal{Q}$: "*le numéro sorti est supérieur ou égal à* 3". Alors, ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 2,3,4,5 *ou* 6".

Définition 1.4. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) (les deux simultanément).
Exemple 1.8. — En reprenant l'**exemple 1.7**, ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 4 *ou* 6".

Définition 1.5. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *implique* $\mathcal{Q}$, et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie (l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).
Vocabulaire — Lorsque $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$, et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment établir que $f(x) \leq f(y)$?**
⇨ **Méthode 1.2. Comment établir une inégalité quelconque ?**
⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par implication ?**

Exemple 1.9. — Pour tout réel x, on a : $\left(x = x^2\right) \Rightarrow \left(x \geq 0\right)$ (l'implication réciproque est fausse).

Définition 1.6. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *équivaut* à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.
Vocabulaire — Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une *condition nécessaire et suffisante* de $\mathcal{Q}$.

⇨ **Méthode 1.5. Comment montrer une équivalence par double implication ?**

Exemple 1.10. — $\forall(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \left(\ln a<\ln b\right)\Leftrightarrow\left(a<b\right)$.

Exemple 1.11. — Pour tout entier n, n est multiple de 6 si, et seulement si, n est multiple à la fois de 2 et de 3.

■ Différents types de raisonnements

❑ La contraposition

Définition 1.7. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. L'implication $\left(\text{non}\,\mathcal{Q}\Rightarrow\text{non}\,\mathcal{P}\right)$ s'appelle la contraposée de l'implication $\left(\mathcal{P}\Rightarrow\mathcal{Q}\right)$.

Exemple 1.12. — La contraposée de la proposition "*s'il pleut, alors le sol est mouillé*" est "*si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas*".

Théorème 1.1. — Une implication et sa contraposée sont équivalentes : montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ revient à montrer que si $\mathcal{Q}$ n'est pas vraie, alors $\mathcal{P}$ n'est pas vraie.

$$\left(\mathcal{P}\Rightarrow\mathcal{Q}\right)\Leftrightarrow\left(\text{non}\,\mathcal{Q}\Rightarrow\text{non}\,\mathcal{P}\right)$$

Remarque 1.4. — L'**exercice 1.7** (question **1**) propose un exemple de raisonnement par contraposition.

❑ Démonstration par l'absurde

Théorème 1.2. — Quelles que soient les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, pour montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie, et on montre qu'il est alors impossible que $\mathcal{Q}$ soit fausse.

$$\left(\mathcal{P}\Rightarrow\mathcal{Q}\right)\Leftrightarrow\left(\left(\mathcal{P}\ \text{et non}\,\mathcal{Q}\right)\ \text{est fausse}\right)$$

⇨ **Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par l'absurde ?**

Remarque 1.5. — L'idée de la démonstration par l'absurde est très simple : pour montrer que $\left(\mathcal{P}\Rightarrow\mathcal{Q}\right)$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ est fausse, puis on cherche à établir une contradiction.

❑ Démonstration par récurrence

Récurrence simple

Théorème 1.3. — Soit un entier naturel n_0.
Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.
Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, en supposant la proposition $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on montre que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Méthode 1.6. Comment montrer une proposition par récurrence ?**

Attention ! Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n (sinon, il n'y a plus rien à prouver !). On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n, et on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Vocabulaire — La preuve de $\mathcal{P}(n_0)$ s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication $\big(\mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big) \Rightarrow \big(\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}\big)$ s'appelle l'*hérédité* de la proposition.

Remarque 1.6. — La plupart du temps, on a $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

Récurrence finie

Il se peut qu'on ait à montrer qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, non pas pour tout entier naturel n, mais pour un nombre fini d'entiers successifs, mettons de l'entier n_1 à l'entier n_2, où $n_1 < n_2$. On a alors la version suivante :

Théorème 1.4. — Si $\mathcal{P}(n_1)$ est vraie et si, pour tout entier n de $[\![n_1, n_2 - 1]\!]$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier n de $[\![n_1, n_2]\!]$.

Récurrence d'ordre *p* (avec $p \geq 2$)

Il arrive que, pour établir une proposition à un certain rang, on ait besoin de savoir qu'elle est vraie aux p rangs précédents (souvent $p = 2$). On a alors :

Théorème 1.5. — Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.
Si les p premières propositions $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(p-1)$ sont vraies et si, en supposant les p propositions $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), \ldots, \mathcal{P}(n+p-1)$ vraies, pour un certain entier naturel n de $\mathbb{N}$, on montre que $\mathcal{P}(n+p)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier n de $\mathbb{N}$.

⇨ **Méthode 1.7. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 ?**

Récurrence forte

Pour établir l'hérédité d'une proposition, il se peut que l'on ait besoin de savoir si elle est vraie à tous les rangs jusqu'au $n^{\text{ème}}$ (et non pas seulement au $n^{\text{ème}}$), pour en montrer la vérité au rang $(n+1)$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.6. — Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n. Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si, pour un certain entier naturel n, en supposant les propositions $\mathcal{P}(k)$ vraies pour tout k de $[\![0, n]\!]$, on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier naturel n.

⇨ **Un exemple de démonstration par récurrence forte sera donné au chapitre 2**

Remarque 1.7. — On ne peut pas remplacer une récurrence d'ordre 2 par une récurrence forte. Dans le cas d'une récurrence d'ordre 2, pour un entier n donné, on a besoin de la vérité de $\mathcal{P}(n)$ et de $\mathcal{P}(n+1)$ pour établir celle de $\mathcal{P}(n+2)$. La vérité d'une seule ne suffit pas ! On ne peut donc pas, contrairement à ce qui se passe dans la récurrence forte, déduire $\mathcal{P}(1)$ de $\mathcal{P}(0)$: il faut $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ pour obtenir $\mathcal{P}(2)$, puis enclencher la récurrence.

■■ Méthodes

■ Comparaison d'expressions

❑ Méthode 1.1. Comment établir que $f(x) \le f(y)$?

Si une fonction f est monotone sur un ensemble I, et si x et y appartiennent à I, alors comparer x et y suffit pour comparer $f(x)$ et $f(y)$.

Plus précisément :

• Si f est croissante sur I, alors : $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$.

• Si f est décroissante sur I, alors : $x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$.

Remarque : si l'on veut établir des équivalences au lieu d'implications, il faut signaler en plus la bijectivité de f (ce qui établit l'implication réciproque grâce aux variations de f^{-1} qui sont les mêmes que celles de f).

⇨ **Exercice 1.4**

Exemple. Montrer que quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \le \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} \quad \text{(nous noterons cette inégalité } (I)\text{)}$$

Remarque importante de présentation — Nous allons commencer par une analyse qui se fait au brouillon, ou même, avec un peu d'habitude, mentalement. Nous proposerons une rédaction "au propre" dans un second temps.

Au brouillon :

• Compte tenu des règles sur les exposants, (I) s'écrit : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \le \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^n$.

• Puisque la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque les deux membres de l'inégalité sont positifs (car $n \ge 2$), alors cette dernière inégalité équivaut à la suivante :

$$1-\frac{2}{n} \le \left(1-\frac{1}{n}\right)^2.$$

• Mais, en développant le membre de droite, nous nous rendons compte que cette inégalité est évidente. En effet, elle s'écrit : $1-\frac{2}{n} \le 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire : $0 \le \frac{1}{n^2}$, ce qui est vrai.

Méthodes

Sur la copie :
Il suffit de "partir" de la fin du raisonnement au brouillon :

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} \geq 1-\frac{2}{n}$ (car $\frac{1}{n^2} \geq 0$) donc : $1-\frac{2}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$.

La fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et chaque membre est positif (car $n \geq 2$)

donc : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^n$.

Cette inégalité s'écrit bien : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$.

❑ Méthode 1.2. Comment établir une inégalité quelconque ?

> Si l'inégalité que l'on se propose de prouver ne peut pas se mettre sous la forme étudiée à la **méthode 1.1,** alors en "passant tout" dans un même membre, on se ramène à prouver qu'une expression est positive (ou négative, selon les cas). Il sera par exemple possible, mais non obligatoire (voir ci-dessous), d'étudier les variations de la fonction définie par cette expression.

⇨ **Exercice 1.4**

Exemple 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 2\sqrt{x}-1$.

Pour tout réel x positif, on a la chance de constater que : $x-2\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$.

Comme un carré est positif, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x-2\sqrt{x}+1 \geq 0$.

On a bien montré que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 2\sqrt{x}-1$.

Exemple 2. Montrer que : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ \ln(1+x) \leq x$.

On pose $f(x) = x-\ln(1+x)$ et on étudie la fonction *f* sur $\left]-1, +\infty\right[$.

Cette fonction est bien sûr dérivable et on a : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ f'(x) = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.

Comme $1+x>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de x, ce qui prouve que *f* décroît sur $\left]-1, 0\right[$ et croît sur $\left]0, +\infty\right[$. Elle est donc minimale pour $x=0$.

On a alors : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ f(x) \geq f(0)$. Comme $f(0)=0$ on obtient : $x-\ln(1+x) \geq 0$.

Conclusion : $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ \ln(1+x) \leq x$