Résumé de cours

Les éléments du raisonnement

Proposition

Définition 1.1. — On appelle proposition toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable x, nous pourrons la noter $\mathcal{P}(x)$.

Remarque 1.1. — On écrira indifféremment " $\mathcal{P}$ " ou " $\mathcal{P}$ est vraie ".

Exemple 1.1. — Pour tout réel x strictement positif, "$x-1>0$" est une proposition dépendante de la variable x. Elle est vraie si $x>1$, et fausse sinon.
Exemple 1.2. — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.
Exemple 1.3. — Pour tout réel x, "$(2x+1)^2$" n'est pas une proposition.

Quantificateurs

Notation 1.1. — Le signe " $\forall$ " placé devant une variable x signifie "*quel que soit x...*".
Le signe " $\exists$ " placé devant une variable x signifie "*il existe (au moins) un x...*".
Le signe " $\exists!$ " placé devant une variable x signifie "*il existe un unique x...*".
" $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1>0$ " se lit : "quel que soit le réel x, x^2+1 est strictement positif" ou "pour tout réel x, x^2+1 est strictement positif".
" $\exists x \in]0,+\infty[,\ x^2-9=0$ " se lit : "il existe au moins un réel x strictement positif tel que x^2-9 est égal à 0" (il y en a d'ailleurs un unique : il s'agit de $x=3$).
" $\exists! n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n(n+1)}{2}=3$ " se lit : "il existe un unique entier naturel n non nul tel que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3" (il s'agit du nombre 2).

Remarque 1.2. — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un x*" signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

Propriété 1.1. — En général, la proposition $(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x,y))$ est différente de $(\exists y, \forall x, \mathcal{P}(x,y))$.

Exemple 1.4. — La proposition " $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ n \leq x < n+1$ " énonce que, quel que soit le réel x, il existe un entier n, tel que x soit compris entre n et $n+1$, cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière de x). Elle est différente de la suivante : " $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x < n+1$ " qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

Remarque 1.3. — Dans l'expression " $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ ...$ ", il faut noter que x dépend de y, on devrait en toute rigueur le noter x_y ou $x(y)$, ce que l'on ne fait presque jamais.

❑ Connecteurs logiques

Définition 1.2. — La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée non$\mathcal{P}$ et appelée *négation* de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Propriété 1.2. — La négation de $\left(\forall x, \mathcal{P}(x)\right)$ est la proposition $\left(\exists x, \text{non}\,\mathcal{P}(x)\right)$.
La négation de $\left(\exists x, \mathcal{P}(x)\right)$ est la proposition $\left(\forall x, \text{non}\,\mathcal{P}(x)\right)$.

Exemples 1.5. — Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "*les trois numéros obtenus sont pairs*" est "*au moins un des numéros obtenus est impair*".
La négation de "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ n \leq x < n+1$" est : "$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ x < n$ ou $x \geq n+1$".
La première proposition est vraie puisqu'elle définit l'entier n qui est la partie entière de x (voir **exemple 1.4**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel x tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle $\left]x-1,\ x\right]$.

Définition 1.3. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{Q}$, soit les deux).
Exemple 1.6. — Pour un dé lancé, on considère $\mathcal{P}$: "*le numéro sorti est pair*", et $\mathcal{Q}$: "*le numéro sorti est supérieur ou égal à* 3". Alors, ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est 2, 3, 4, 5 ou 6*".

Définition 1.4. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) (les deux simultanément).
Exemple 1.7. — En reprenant l'**exemple 1.7**, ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 4 *ou* 6".

Définition 1.5. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *implique* $\mathcal{Q}$, et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie (l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).
Vocabulaire — Lorsque $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$, et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment montrer une proposition par implication ?**

Exemple 1.8. — Pour tout réel x, on a : $\left(x = x^2\right) \Rightarrow \left(x \geq 0\right)$ (l'implication réciproque est fausse).

Définition 1.6. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *équivaut* à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.
Vocabulaire — Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante de $\mathcal{Q}$.

Exemple 1.9. — $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \forall b \in \mathbb{R}_+,\ \left(\sqrt{\mathrm{a}} < \sqrt{b}\right) \Leftrightarrow \left(a < b\right)$.

Exemple 1.10. — Pour tout entier n, n est multiple de 6 si, et seulement si, n est multiple à la fois de 2 et de 3.

■ Différents types de raisonnements

❑ Démonstration par contre-exemple

Théorème 1.1. — Pour montrer qu'une propriété n'est pas toujours vraie, on trouve un contre-exemple, c'est-à-dire un exemple pour lequel la propriété est fausse.

⇨ **Méthode 1.2. Comment utiliser un contre-exemple ?**

❑ Démonstration par l'absurde

Théorème 1.2. — Quelles que soient les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, pour montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ est fausse. Ensuite on tente d'en déduire une contradiction.

⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par l'absurde ?**

❑ Démonstration par récurrence

Théorème 1.3. — Soit un entier naturel n_0.
Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.
Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, en supposant la proposition $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on montre que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence ?**

Attention ! Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n (sinon, il n'y a plus rien à prouver !). On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n, et on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Vocabulaire. — La preuve de $\mathcal{P}(n_0)$ s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication $\left(\mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\right) \Rightarrow \left(\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}\right)$ s'appelle l'*hérédité* de la proposition.

Remarque 1.4. — La plupart du temps, on a $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

■■ Méthodes

■ Différents types de raisonnement

❑ Méthode 1.1. Comment montrer une proposition par implication ?

La plupart du temps, pour prouver une proposition, on procède par implication (sans se sentir obligé d'utiliser le symbole $\Rightarrow$) en construisant un raisonnement "direct".

➪ Exercice 1.3

Exemple. Montrer que, si $x < 1$, alors $(x-4)^2 > 9$.

Si $x < 1$, alors on a : $x - 4 < -3$.

Par décroissance de la fonction "carré" sur $\mathbb{R}_-$, on en déduit que : $(x-4)^2 > 9$.

Avec des notations plus symboliques, on vient de montrer que : $x < 1 \Rightarrow (x-4)^2 > 9$.

❑ Méthode 1.2. Comment utiliser un contre-exemple ?

Pour montrer qu'une implication est fausse, il suffit de trouver un exemple qui montre que c'est le cas.

➪ Exercices 1.1, 1.2

Exemple. Montrer que si l'on a $x^2 = y^2$, alors on ne peut pas en déduire que $x = y$.

En effet, avec $x = 2$ et $y = -2$, on a bien $x^2 = y^2$ et pourtant, on a : $x \neq y$.

❑ Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par l'absurde ?

Pour montrer qu'une implication est vraie, il suffit de supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, puis d'en déduire une contradiction.

➪ Exercice 1.4

Exemple. Montrer que pour tout nombre réel x différent de -3, on a : $\dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

Par l'absurde, si l'on avait $\dfrac{x+1}{x+3} = 1$, alors on en déduirait $x+1 = x+3$, ce qui équivaut à $1 = 3$.

Ceci étant manifestement faux, on en déduit que : $\forall x \neq -3,\ \dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

❑ Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence ?

n_0 est ici un entier naturel fixé.
On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n à partir de n_0.

- Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : on considère un entier n fixé supérieur ou égal à n_0 tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. En utilisant $\mathcal{P}(n)$, on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Exercices 1.5, 1.6, 1.8**

Exemple. On pose $u_0 = 1$ et on suppose que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n^2$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
On commence par noter, pour n entier naturel, $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 1$".
• Initialisation : on a bien $u_0 = 1$.
• Hérédité : on suppose que $u_n = 1$ pour un entier naturel n fixé dans $\mathbb{N}$.
On a alors : $u_{n+1} = 1^2 = 1$.
Ceci montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
• En conclusion, on a bien montré, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$$

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [x, +\infty[, \exists n \in \mathbb{N}, x \leq n \leq y$.	☐	☐
2.	$\exists! y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = y$.	☐	☐
3.	La fonction *f* n'est pas la fonction nulle signifie : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.	☐	☐
4.	Pour toute fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(-x)$.	☐	☐
5.	Il existe au moins une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)$	☐	☐
6.	On désigne par a et b deux réels, alors : $(ab \neq 0) \Leftrightarrow (a \neq 0$ ou $b \neq 0)$.	☐	☐
7.	L'équation $x^2 = -x$ n'a pas de solution.	☐	☐
8.	Pour tout réel x positif, on a : $x^2 \geq x$.	☐	☐
9.	Pour tout réel x strictement négatif, on a : $x^2 \geq x$.	☐	☐
10.	Si $\mathcal{P}(n)$ est " $u_{2n+1} \leq 2^n$ ", alors $\mathcal{P}(n+1)$ est " $u_{2n+2} \leq 2^{n+1}$ ".	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

❑ **Exercice 1.1.** — On considère le polynôme P défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{11}{24}x^2 + \frac{7}{12}x + 1.$$

Calculer $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ et $P(4)$. Peut-on en déduire quelque chose pour $P(5)$?

❑ **Exercice 1.2.** — Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$.

1. Montrer par un contre-exemple que l'on n'a pas, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.

2. Montrer par un contre-exemple que l'on n'a pas, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

❑ **Exercice 1.3.** — Montrer que si $x \in [0, 1]$, alors $1 - x \in [0, 1]$.

❑ **Exercice 1.4.** ** — Le but de cet exercice est de montrer que $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ (où l'on désigne par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions d'entiers).

Supposons pour cela qu'il existe deux entiers n et p (avec $p \geq 1$) tels que $\sqrt{2} = \dfrac{n}{p}$. On les suppose de plus choisis de telle sorte que la fraction soit irréductible (non simplifiable).

1. Justifier que n^2 est pair puis montrer que n est pair.

2. En écrivant n sous la forme $2n'$, avec n' élément de $\mathbb{N}$, montrer que p lui-même est pair.

3. Conclure.

❑ **Exercice 1.5.** — Soit un réel a positif. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geq 1 + na$.

❑ **Exercice 1.6.** — Montrer que la proposition $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n^2\right)$ est fausse.

Prouver en revanche que : $\forall n \geq 4,\ 2^n \geq n^2$.

❑ **Exercice 1.7.** ** — Le but de cet exercice est de déterminer, si elles existent, toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, et vérifiant la condition suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

1. Considérons f une telle fonction.

a) En donnant à x et y des valeurs particulières, donner les seules valeurs possibles de $f(0)$.

b) En donnant à x et y d'autres valeurs particulières, justifier que $f(0)$ vaut nécessairement 1.

c) En donnant à y seulement une certaine valeur, donner l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.

2. Conclure quant au but de l'exercice.

❑ **Exercice 1.8.** * — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \frac{1}{2} \text{ et } u_{2n+1} = -1$$

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.1. Après calcul de $P(5)$, on constate que ce n'est pas ce que l'on aurait cru pouvoir attendre.
Exercice 1.3. Traduire $x \in [0, 1]$ par $0 \leq x \leq 1$.

Exercice 1.4. Pour la question **1**, ayant obtenu que n^2 est pair, pour montrer que n est pair, supposer que n est impair et montrer qu'alors n^2 serait impair.
Exercices 1.5. et **1.6.** Faire une récurrence.
Exercice 1.7. Pour la question **1.a)**, faire $x = y = 0$.

Pour la question **1.b)**, faire $x = 0$ et $y = ...$

La deuxième question n'est pas stupide ! Il se pourrait que la fonction trouvée à la première question ne vérifie pas la condition imposée, ce qui signifierait que le problème posé n'aurait pas de solution.