

CHAPITRE 1

Calcul dans \mathbb{R}

Dans ce chapitre nous proposons tout d'abord une classification des nombres dont certains sont connus depuis le Primaire.

Nous donnons ensuite une axiomatique simple autorisant des calculs basiques dans l'ensemble des nombres réels.

Enfin nous démontrons quelques théorèmes utilisés au collège mais rarement prouvés à ce niveau. Ces derniers vont vous permettre d'acquérir une meilleure compréhension de l'algèbre qui structure les calculs dans \mathbb{R} effectués en Seconde et dans les classes suivantes.

1.1 Classification des ensembles de nombres

1.1.1 Les entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté \mathbb{N} . Enfant, vous avez commencé à compter avec des entiers naturels. Ce sont donc des nombres qui vous sont familiers depuis longtemps. Cependant la non finitude de l'ensemble des entiers naturels est plus complexe à appréhender.

Dans le langage mathématique, on note

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots; n \dots\}$$

Remarques. Nous en faisons cinq.

- Les \dots entre n et $\}$ traduisent que \mathbb{N} est infini.
- Pour traduire qu'un nombre n appartient à \mathbb{N} , nous utilisons le symbole d'appartenance \in . On note : $n \in \mathbb{N}$.
- \mathbb{N} privé de 0 est noté $\mathbb{N}^* = \{1; 2; \dots; n \dots\}$.

- Tout entier naturel n admet un successeur $n + 1 \in \mathbb{N}$.
- Tout entier naturel non nul n admet un précédent $n - 1 \in \mathbb{N}$.

1.1.2 Les entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs, noté \mathbb{Z} , est tel que

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Remarques. Nous en donnons trois.

- \mathbb{Z} privé de 0 est noté \mathbb{Z}^* .
- Tout entier naturel est un entier relatif. On dit que \mathbb{N} est inclus dans \mathbb{Z} .

On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

- La réciproque est fautive. Un contre-exemple est $-2 \in \mathbb{Z}$ et $-2 \notin \mathbb{N}$.

1.1.3 Les nombres décimaux

Exemples. Nous proposons trois exemples introductifs.

$$\triangleright 2,1 = \frac{21}{10} \text{ est un nombre décimal,}$$

$$\triangleright -5,64 = -\frac{564}{100} \text{ est un nombre décimal,}$$

$\triangleright 6, \underbrace{00 \dots 0}_{n-1 \text{ zeros}} 1 = \frac{6 \overbrace{00 \dots 0}^{n-1 \text{ zeros}} 1}{10^n}$, avec n entier naturel non nul, est un nombre décimal.

Définition. L'ensemble des nombres décimaux, noté \mathbb{D} , est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Remarques. Nous en avons deux.

- Tout entier naturel ou relatif est un nombre décimal.
- En effet, pour tout $a \in \mathbb{N}$ ou $a \in \mathbb{Z}$, nous avons $a = \frac{a}{10^0}$.
- Nous retiendrons que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

1.1.4 Les nombres rationnels

Définition. L'ensemble des nombres rationnels, noté \mathbb{Q} , est l'ensemble des nombres (des fractions) de la forme $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Remarques. Nous en proposons cinq.

- Nous pouvons définir un rationnel $\frac{a}{b}$, en restreignant $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
- Tout nombre décimal de la forme $\frac{a}{10^n}$ est un nombre rationnel $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b = 10^n$.

- Nous retiendrons que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- La réciproque est fautive. Nous prenons comme contre-exemple $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

• Un nombre rationnel a une partie décimale illimitée périodique.

Par exemple, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &\approx 0, \underbrace{3333333333333333333333333333 \dots}_{\text{partie décimale illimitée de période 1}} \\ \frac{7}{11} &\approx 0, \underbrace{63636363636363636363636363 \dots}_{\text{partie décimale illimitée de période 2}} \\ \frac{17}{13} &\approx 1, \underbrace{307692307692307692307692 \dots}_{\text{partie décimale illimitée de période 6}} \end{aligned}$$

1.1.5 Les nombres irrationnels

Définition. L'ensemble de nombres irrationnels est l'ensemble des nombres qui ne sont pas rationnels.

Par exemple $\sqrt{2}$, π , $\sqrt{5} + \sqrt{13}$, $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ sont des nombres irrationnels.

Remarque. Un nombre irrationnel a une partie décimale illimitée non périodique.

Par exemple, nous avons

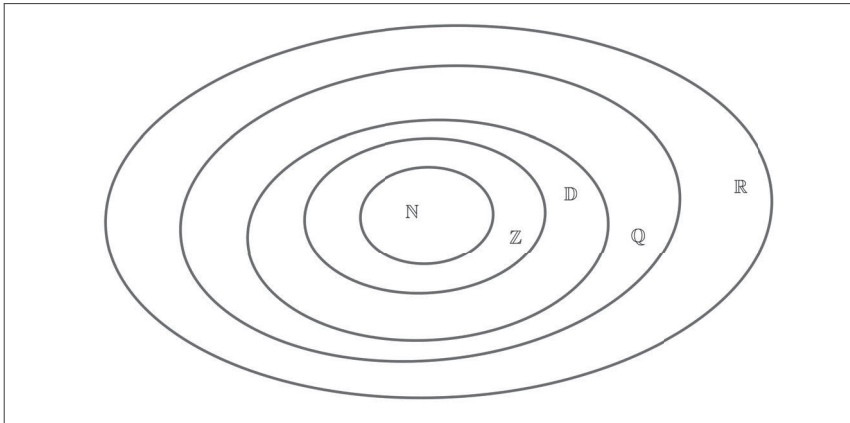
$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\approx 1, \underbrace{4142135623730950488016887 \dots}_{\text{partie décimale illimitée non périodique}} \\ \pi &\approx 3, \underbrace{1415926535897932384626433 \dots}_{\text{partie décimale illimitée non périodique}} \end{aligned}$$

1.1.6 Les nombres réels

Définition. L'ensemble des nombres réels, noté \mathbb{R} est la réunion de l'ensemble des nombres rationnels avec l'ensemble des nombres irrationnels.

Remarques. Nous en proposons deux.

- On peut noter $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels.
- Nous retiendrons que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Exemple (le nombre d'or). Le nombre d'or, noté ϕ , est tel que $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Nous montrons que ϕ est irrationnel.

Nous raisonnons par l'absurde¹ en supposant que ϕ est rationnel.

Posons $\phi = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls puisque $\phi > 0$.

Nous avons $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{p}{q}$. Nous en déduisons

$$\sqrt{5} = \frac{2p}{q} - 1 = \frac{2p - q}{q}.$$

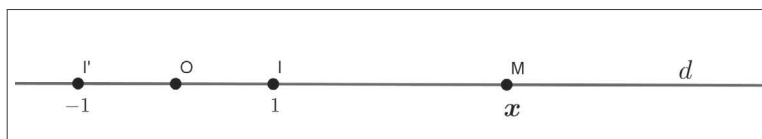
Nous savons que $2p - q \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Il en résulte que $\frac{2p - q}{q} \in \mathbb{Q}$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.

Nous en concluons que le nombre d'or ϕ est irrationnel.

1.1.7 Représentation géométrique d'un nombre réel

Soit d une droite graduée par un repère $(O; I)$. À chaque point M de cette droite, nous associons un réel x unique qui est l'abscisse du point M relativement au repère $(O; I)$.



1. Annexe § 5.1

1.1.8 Réels positifs - Réels négatifs

À chaque point M de la demi-droite $[O; I)$ est associé un réel positif ou nul.

On note \mathbb{R}^+ l'ensemble des réels positifs ou nuls.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\}$.

Soit I' le point de d d'abscisse -1 .

À chaque point M de la demi-droite $(I'; O]$ est associé un réel négatif ou nul.

On note \mathbb{R}^- l'ensemble des réels négatifs ou nuls.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 0\}$.

À chaque point M de la demi-droite ouverte $]O; I)$ est associé un réel positif strictement.

On note \mathbb{R}^{+*} l'ensemble des réels strictement positifs.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire $\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$.

À chaque point M de la demi-droite ouverte $(I'; O[$ est associé un réel négatif strictement.

On note \mathbb{R}^{-*} l'ensemble des réels strictement négatifs.

En notation ensembliste, nous pouvons écrire $\mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R}/x < 0\}$.

1.2 Addition dans \mathbb{R}

1.2.1 Axiomatique de l'addition dans l'ensemble des nombres réels

Axiome. Pour tous les réels a, b et c , nous disposons pour structurer l'addition dans \mathbb{R} des axiomes suivants :

1. $a + b \in \mathbb{R}$.
2. $a + b = b + a$. On dit que $+$ est commutative.
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$. On dit que $+$ est associative.
4. $a + 0 = 0 + a = a$. On dit que 0 est neutre pour $+$ dans \mathbb{R} .
5. Chaque réel a admet un unique opposé $-a$ tel que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Remarques. Nous en faisons trois.

- \mathbb{R} muni de son addition $+$, noté $(\mathbb{R}, +)$ et satisfaisant aux propriétés (1) à (5) est un groupe commutatif.

- $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe commutatif car la propriété (5) est en défaut.
- Disposant de cette axiomatique de l'addition des réels, nous pouvons commencer à démontrer les règles de calcul usuelles que vous avez utilisées au collège.

La proposition qui suit en est une première illustration.

Proposition. *Pour tout réel a , on a : $-(-a) = a$.*

Démonstration. Dans l'axiome 5, nous remplaçons a par $-a$.

Nous obtenons $(-a) + (-(-a)) = (-(-a)) + (-a) = 0$.

Or, le réel a étant donné, par unicité de l'opposé $-a$, nous obtenons

$$-(-a) = a.$$

1.2.2 Soustraction dans \mathbb{R}

Définition. *Soient a et b deux réels. Par définition, nous avons*

$$a - b = a + (-b).$$

Remarque. La soustraction est ni commutative, ni associative.

1.2.3 Egalité dans \mathbb{R}

Définition. *Soient a et b deux réels. Nous disposons de la définition*

$$a = b \text{ si et seulement si } a - b = 0.$$

Exemple (à nouveau le nombre d'or). Nous savons que $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Nous vérifions que

$$\phi^2 = \phi + 1.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \phi^2 - \phi - 1 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1, \\ &= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi justifié que : $\phi^2 = \phi + 1$.

Remarque. Pour prouver une égalité dans \mathbb{R} , nous pouvons choisir une des méthodes suivantes :

▷ Partir du membre de gauche pour obtenir après calculs le membre de droite.

▷ Partir du membre de droite pour obtenir après calculs le membre de gauche.

▷ Calculer la différence des deux membres pour obtenir après calculs la valeur 0.

Proposition. Soient a , b et c trois réels. Nous disposons des propriétés suivantes :

- $a = b$, alors $b = a$. On dit que la relation $=$ est symétrique.
- si $a = b$ et $b = c$, alors $a = c$. On dit que la relation $=$ est transitive.
- $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$. On dit que la relation $=$ est compatible avec l'addition.

Démonstration. • Si $a = b$, alors $a - b = 0$ donc $b - a = 0$, ce qui justifie

$$b = a.$$

• Si $a = b$ et $b = c$, alors on a $a - b = 0$ et $b - c = 0$, donc $a - b + b - c = 0$, ce qui donne

$$a - c = 0, \text{ soit } a = c.$$

- Si $a + c = b + c$, alors $a + c - (b + c) = 0$, soit $a - b = 0$, donc

$$a = b.$$

Réciproquement, supposons que $a = b$.

Nous avons $a + c - (b + c) = a - b = 0$, ce qui prouve que

$$a + c = b + c$$

Proposition. Soient a et b deux réels donnés. L'équation $x + a = b$ admet pour unique solution $x = b - a$.

Démonstration. L'égalité $x + a = b$ équivaut à $x + a + (-a) = b + (-a)$, ce qui est équivalent à

$$x = b - a.$$

1.3 Multiplication dans \mathbb{R}

1.3.1 Axiomatique de la multiplication dans l'ensemble des nombres réels

Axiome. Pour tous les réels a , b et c , nous disposons pour structurer la multiplication dans \mathbb{R} des axiomes suivants :

1. $ab \in \mathbb{R}$.
2. $ab = ba$. On dit que \times est commutative.
3. $(ab)c = a(bc)$. On dit que \times est associative.
4. $a \times 1 = 1 \times a = a$. On dit que 1 est neutre pour \times dans \mathbb{R} .
5. Chaque réel $a \neq 0$ admet un unique inverse $\frac{1}{a}$ tel que : $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$.

Définition (du quotient de deux réels). Pour tous les réels a et $b \neq 0$, le quotient de a par b est défini par

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

1.3.2 Axiome de la distributivité de la multiplication sur l'addition

Axiome. Pour tous les réels a , b et c , nous disposons de l'égalité

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Remarques. Nous en faisons deux.

- Si nous utilisons l'égalité ci-dessus de la gauche vers la droite, alors nous développons.
- Si nous utilisons l'égalité ci-dessus de la droite vers la gauche, alors nous factorisons.

Proposition (identités carrés). Pour tous les réels a et b , nous avons

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Démonstration. Ces trois identités remarquables sont connues depuis le collège. Cependant, nous en donnons une preuve puisque cette dernière résulte essentiellement de l'axiome de distributivité.