# 2 Combinatoire

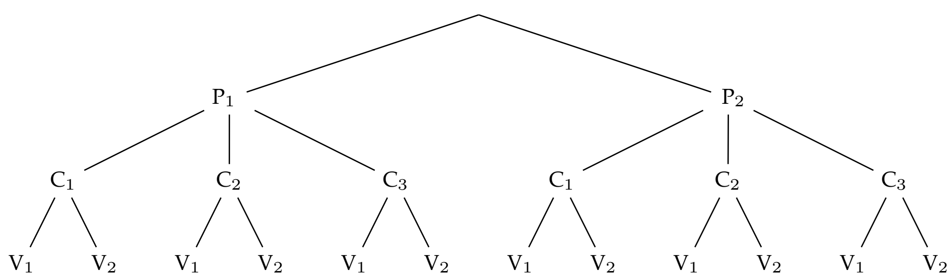
*Il y a trois sortes de mathématiciens. Ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas compter.*
*Il y a 10 types de mathématiciens. Ceux qui comprennent le binaire et les autres.*

La combinatoire est l'art de dénombrer des possibilités. Un joueur de loto s'intéresse au nombre de possibilités de cocher sa grille. Un gérant d'un call-center souhaite savoir de combien de manières différentes il peut créer des plannings de roulements de services. Dans ce chapitre on établira les méthodes pour répondre à ce genre de questions. D'abord on exposera les principes multiplicatif et additif qui sont à la base de tout dénombrement. Ensuite on présentera les situations les plus fréquentes en combinatoire, celles qui font appel aux coefficients d'arrangements, binomiaux et multinomiaux. Il est important de les maîtriser pour pouvoir comprendre, sur des exemples concrets du prochain chapitre, certains concepts fondamentaux en probabilités.

## 2.1. Principes multiplicatif et additif

### Principe multiplicatif

**Exemple 2.1.** Une personne dispose de deux pantalons $P_1$, $P_2$ ; de trois chemises $C_1$, $C_2$, $C_3$ ; et de deux vestes $V_1$, $V_2$. Question : De combien de manières peut-elle s'habiller ? Dessinons un arbre de choix.




Chaque chemin du haut vers le bas représente une manière de s'habiller. Le chemin le plus à gauche, par exemple, signifie qu'on s'habille avec $P_1$, $C_1$ et $V_1$. Au total il y a 12 chemins, donc il y a autant de manières de s'habiller.

On remarque que le nombre total de chemins est le produit des nombres de choix qui se présentent à chaque étape du parcours : $2 \times 3 \times 2 = 12$. Il faut surtout éviter l'erreur de raisonnement que beaucoup de gens commettent : « On peut s'habiller de 7 manières différentes car $2+3+2=7$. » Non, il faut multiplier, pas additionner, les nombres de possibilités à chaque étape ! C'est le *principe multiplicatif*.

$$\boxed{\text{Nombre de possibilités } = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p}$$

Dans cette formule $p$ désigne le nombre d'étapes ; $n_1$ est le nombre de choix à la première étape ; $n_2$ le nombre de choix à la deuxième étape, etc.

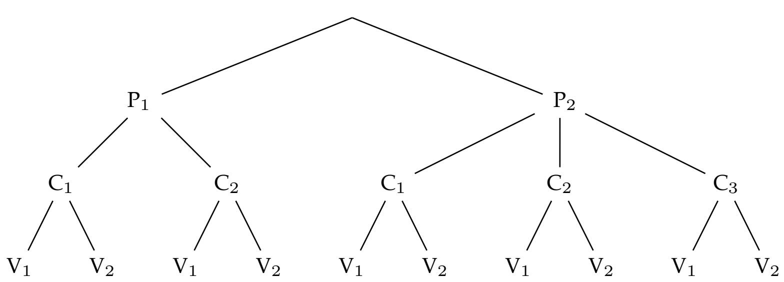
**Tests**

**2.1**. Si dans l'exemple précédent on choisit d'abord la chemise puis le pantalon, puis la veste, obtient-on le même arbre de choix ?
Obtient-on le même nombre de possibilités au total ?

**2.2**. On reprend toujours le même exemple, mais en été où le port d'une veste est une option non-obligatoire. Combien de manières différentes y a-t-il maintenant pour s'habiller ?

### Principe additif ou distinction de cas

**Exemple 2.2.** On reprend l'exemple précédent mais avec une restriction : Le pantalon $P_1$ ne va pas du tout avec la chemise $C_3$. La symétrie de l'arbre est brisée ; il ne reste que 10 manières de s'habiller :




On retrouve ce résultat en faisant une distinction de cas : Si on prend le pantalon $P_1$ alors on a $1 \times 2 \times 2 = 4$ possibilités ; si on ne prend pas le pantalon $P_1$ alors on a $1 \times 3 \times 2 = 6$ possibilités. Au total cela fait bien $4+6=10$ possibilités.
Plus généralement on a le *principe additif* ou la *distinction de cas* :

$$\boxed{\text{Nombre de possibilités } = m_1 + m_2 + \cdots + m_r}$$

où $r$ est le nombre de cas à distinguer et $m_k$ le nombre de possibilités au $k$-ième cas. (Les nombres $m_k$ pourront, à leur tour, être déterminés par le principe multiplicatif.)
On a déjà rencontré le principe additif dans la proposition 1.2. : Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ est une partition de $E$ alors $|E| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_r|$ .

## 2.2. Permutations, arrangements, combinaisons

En 1808 le mathématicien alsacien Christian Kramp (1760-1826) publia ses *Élements d'arithmétique universelle* [6]. Il y introduisit une notation bizarre :

> *Je me sers de la notation très simple n! pour désigner le produit des nombres décroissans depuis n jusqu'à l'unité, savoir n(n—1) (n—2) .... 3. 2. 1. L'emploi continuel de l'analyse combinatoire que je fais dans la plupart de mes démonstrations, a rendu cette notation indispensable.*

Un point d'exclamation après un nombre ? Au départ les mathématiciens ne voulaient pas l'utiliser – trop moche, disaient-ils. Mais finalement ce petit point d'exclamation a fait son chemin et, de nos jours, il accapare même une touche sur la calculatrice. Dans ce paragraphe nous allons découvrir sa signification.

### Arrangements avec répétitions ou tirages avec remise

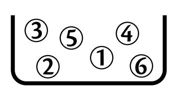
Combien de mots à $k$ lettres peut-on former avec un alphabet de $n$ lettres ?
Pour chaque lettre du mot on dispose de $n$ choix. D'après le principe multiplicatif :

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k \text{ facteurs}} = n^k .$$

**Exemple 2.3. (Arrangements avec répétitions)** Combien de mots à trois lettres peut-on former avec les lettres A ou B ? Pour la première lettre du mot on a 2 choix, pour la seconde aussi et pour la troisième aussi. Donc la réponse est $2^3 = 8$. Il s'agit des mots AAA, BAA, ABA, AAB, ABB, BAB, BBA, BBB.

On parle aussi de *tirages avec remise*, car écrire un mot à $k$ lettres avec un alphabet de $n$ lettres revient à tirer $k$ fois une boule dans une urne contenant ces $n$ lettres, en remettant chaque fois le boule tirée dans l'urne.

**Exemple 2.4. (Tirages avec remise)**
Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6. On tire quatre fois une boule avec remise. On appellera « tirage » la suite ordonnée des quatre résultats. Par exemple, le tirage 6-2-2-5 signifie : on tire d'abord la 6, puis deux fois la 2 et enfin la 5. Le nombre de tirages possibles est $6^4 = 1296$.




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Nombre de possibilités de faire $k$ tirages successifs d'une boule avec remise dans une urne contenant $n$ boules distinctes | $=$ | nombre de mots à $k$ lettres d'un alphabet de $n$ lettres | $=$ | $n^k$ |

**Tests**

**2.3.** De combien de manières peut-on former un mot à 3 lettres avec les lettres E, T, H, O, M ?

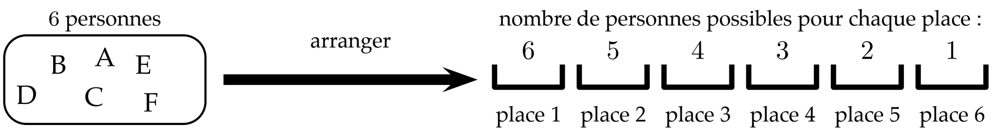
**2.4.** Combien de digicodes à trois chiffres peut-on former ?

### Factorielle et permutations

Six amis s'assoient sur un banc. De combien de manières peuvent-ils le faire ? Notons les amis A, B, C, D, E et F. Chaque manière de les asseoir correspond à un mot à $6$ lettres, par exemple BACEDF. Les lettres du mot doivent être distinctes (un mot comme BABEDF n'est pas bon car l'ami B y occuperait deux places en même temps).

On choisit un des $6$ amis et on le place sur la place $1$ ;
on choisit un des $5$ amis restants pour la place $2$ ;
$\vdots$
à la fin, pour la place $6$, il reste une seule personne.

D'après le principe multiplicatif, le nombre de possibilités est $6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$. C'est exactement le $6!$ dans la notation introduite par Kramp.




Plus généralement un arrangement de $n$ objets s'appelle une *permutation*. Le nombre de permutations $n$ objets est noté $n!$ et appelé *factorielle* de $n$.

$$\boxed{n! \;=\; \text{factorielle de } n \;=\; \begin{array}{l}\text{nombre de permu-}\\ \text{tations de } n \text{ objets}\end{array} \;=\; n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \,.}$$

Votre calculatrice possède une touche « ! » pour la factorielle. Dans la plupart des logiciels et tableurs la commande est `FACT(n)` ou `FACTORIAL(n)`.

$$0! = 1\,, \quad 1! = 1\,, \quad 2! = 2 \times 1 = 2\,, \quad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6\,, \quad 4! = 4 \times 3! = 24\,.$$

On a $0! = 1$ car il existe exactement une seule manière de ne rien arranger.

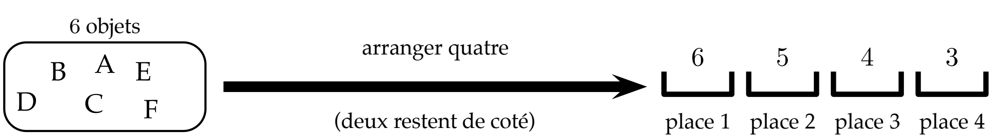
**Tests**

**2.5**. Déterminer $5!$ et $6!$ sans calculatrice.

**2.6**. Simplifier $\frac{9!}{7!}$, $\frac{9!}{11!}$, $\frac{n!}{(n-1)!}$ et $\frac{n!}{(n-3)!}$.

### Arrangements sans répétitions ou tirages sans remise

Reprenons l'exemple des six amis mais avec un banc plus étroit : seulement quatre personnes peuvent y prendre place, deux vont devoir rester debout. Maintenant le nombre de possibilités est égal à $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.



Généralisation : On dispose de $n$ objets ; de combien de manières peut-on en choisir $k$ et les arranger ?

$$\text{choix d'objets :}\quad \underset{\text{pour place 1}}{n} \times \underset{\text{pour place 2}}{(n-1)} \times \underset{\text{pour place 3}}{(n-2)} \times \cdots \times \underset{\text{pour place } k}{(n-k+1)}.$$

On note $A_n^k$ ce nombre et on l'appelle *coefficient d'arrangements*.

$$\boxed{A_n^k = \begin{array}{l}\text{nombre d'arrangements de } k \\ \text{objets à choisir parmi } n \text{ objets}\end{array} = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ facteurs}}\ .}$$

**Exemple 2.5.**

*Question* : J'ai cinq pots de fleurs pour décorer ma fenêtre, mais sur la balustrade il y de la place pour seulement trois. Combien d'arrangements sont possibles ?

*Réponse* : $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60.$

*Question* : Combien de mots à deux lettres distinctes peut-on former avec les lettres A,B,C ?

*Réponse* : $A_3^2 = 3 \times 2 = 6.$ Ce sont AB, BA, AC, CA, BC et CB.

*Question* : Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6. On tire quatre fois une boule sans la remettre. Quel est le nombre de tirages possibles ?

*Réponse* : $A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360.$

On a vu dans l'exemple 2.4. qu'il y a $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$ possibilités quand les tirages sont avec remise. Elles incluent un résultat comme 2-6-2-3 qui, sans remise, n'existe pas.

Exprimons le coefficient d'arrangements par des factorielles. L'idée est de compléter le produit descendant de $n$ à $n-k+1$ en une factorielle :

$$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cancel{(n-k)\cdots 2 \times 1}}{\cancel{(n-k)\cdots 2 \times 1}} = \frac{n!}{(n-k)!}\ .$$

Ce quotient a sa logique. Pour arranger $k$ objets à choisir parmi $n$ objets on arrange, dans un premier temps, *tous* les objets ; ça fait $n!$ possibilités. Ensuite on convient que les seuls objets qui nous intéressent sont les premiers $k$ objets de cet arrangement ; autrement dit, on cache les derniers $n-k$ objets. Puisque les permutations de cette partie cachée n'ont aucun effet sur le reste il faut diviser par $(n-k)!$.

Regardons ce qui se passe lorsque $k > n$. De combien de manières peut-on choisir cinq objets parmi trois et les arranger ? La réponse est simplement « aucune ». D'ailleurs c'est cohérent avec la formule : $A_3^5 = 3 \times 2 \times 1 \times 0 \times (-1) = 0$. Plus généralement si $k, n$ sont des entiers tels que $0 \leqslant n < k$ alors $A_n^k = 0$ car l'un des facteurs du produit $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ est nul.

**Tests**

**2.7.** Combien de mots à 3 lettres peut-on former avec les cartons $\boxed{\text{A}}\boxed{\text{B}}\boxed{\text{C}}\boxed{\text{D}}\boxed{\text{E}}\boxed{\text{F}}\boxed{\text{G}}$ ?

**2.8.** Que pouvez-vous dire de $A_n^n$ ? Et de $A_n^{n-1}$ ?

**2.9.** En salle de TD les étudiants occupent la dernière rangée entièrement. Elle est constituée de 8 places et il y a 26 étudiants. De combien de manières peuvent-ils l'occuper ?

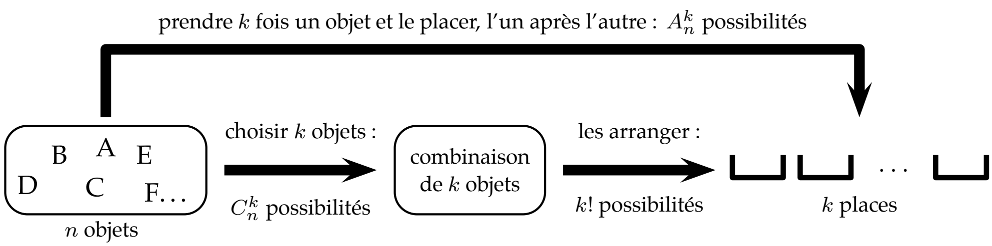
### Combinaisons. Coefficient binomial

Dans un arrangement l'ordre compte. Lorsque l'ordre ne compte pas, on parle de *combinaison*. Prenez l'exemple des six amis : peut-être sont-ils seulement intéressés à savoir qui a le privilège de s'asseoir sur le banc étroit, peu importe l'ordre. Ou prenez le poker : ce qui vous intéresse est la combinaison des cartes que vous tenez dans votre main et pas leur ordre. On note une combinaison comme ensemble car dans un ensemble l'ordre ne compte pas : {B,A,C} est la même combinaison que {C,A,B}, tandis que (B,A,C) et (C,A,B) sont des arrangements distincts.
Le *coefficient binomial* $C_n^k$, aussi noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de combinaisons possibles de $k$ objets à choisir parmi $n$ objets.

$$\boxed{\binom{n}{k} = C_n^k = \text{nombre de combinaisons de } k \text{ objets parmi } n \text{ objets}}$$

**Mise en garde.** Dans une des notations le $n$ est en bas, dans l'autre en haut.

On a, par exemple, $C_4^2 = 6$ car il y a 6 combinaisons à deux éléments pris dans {A,B,C,D} ; ce sont {A,B}, {A,C}, {A,D}, {B,C}, {B,D} et {C,D}. Par quelle formule générale peut-on calculer le coefficient binomial $C_n^k$ ? Un des secrets des mathématiciens est de tirer des conclusions en faisant un même calcul de différentes manières.
Considérons $n$ objets dont on veut arranger $k$. D'une part on sait que le nombre d'arrangements possibles est $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ ; on l'avait trouvé en prenant $k$ objets, l'un après l'autre, et en les plaçant l'un derrière l'autre.
Mais on peut aussi procéder autrement : d'abord choisir la combinaison des $k$ objets ; pour cela il y a $C_n^k$ possibilités. Ensuite les arranger ; pour cela il y a $k!$ possibilités. D'après le principe multiplicatif il y a $C_n^k \times k!$ possibilités au total.




Les deux méthodes doivent donner le même nombre total de possibilités :

$$A_n^k = C_n^k \times k!$$

ce qui s'écrit aussi $C_n^k = A_n^k/k!$ et c'est la formule qu'on cherchait !

$$\boxed{\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

Mnémotechnique pour $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$ : dans $A_n^k$ on tient compte de l'ordre, donc on divise par le nombre de permutations des $k$ objets, c'est-à-dire par $k!$.

Mnémotechnique pour $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ : on arrange $n$ objets en une ligne ; il y a $n!$ possibilités. On ne s'intéresse qu'aux premiers $k$ objets sans tenir compte de leur ordre ; donc on divise par le nombre de permutations de ces $k$ objets entre eux et par le nombre de permutations des autres $n-k$ objets entre eux.

**Exemple 2.6.** Un joueur tire 4 cartes d'un jeu à 24 cartes. On appelle cette combinaison de cartes une « main ». Le nombre de mains possibles est

$$\binom{24}{4} = \frac{24 \times 23 \times 22 \times 21}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 10\,626.$$

**Exemple 2.7. (Tirages non ordonnées sans remise)** Au loto on tire au hasard 5 boules parmi 49 boules numérotées de 1 à 49, l'ordre dans lequel on tire les boules n'a pas d'importance. Le nombre de combinaisons possibles est

$$\binom{49}{5} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 1\,906\,884.$$

C'est presque 2 millions. Comme si ce n'était pas assez, la Française des Jeux a introduit le fameux « numéro de chance » qui correspond au tirage supplémentaire d'une boule parmi dix. Il porte le nombre de tirages possible à presque 20 millions ; la probabilité de gagner le jackpot est seulement de $1/19\,068\,840$.

Tirer les boules *une par une*, sans remise et sans tenir compte de l'ordre, revient au même que les prélever *simultanément*. C'est pour augmenter le suspense, qu'au loto le tirage des cinq boules s'effectue une par une ; le jeu ne changerait pas si on prélevait cinq boules en une seule fois.

**Exemple 2.8.** Neuf collaborateurs souhaitent former deux groupes de travail, l'un à quatre et l'autre cinq personnes. Il existe 126 manières pour faire cela :

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{9 \times 7 \times 6}{3} = 9 \times 7 \times 2 = 126.$$

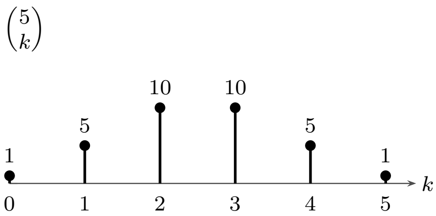
Après avoir constitué le groupe à quatre personnes, plus besoin de choisir l'autre car il sera formé des cinq personnes restantes (combinaison complémentaire). D'ailleurs si on raisonne dès le départ sur le groupe de cinq personnes :

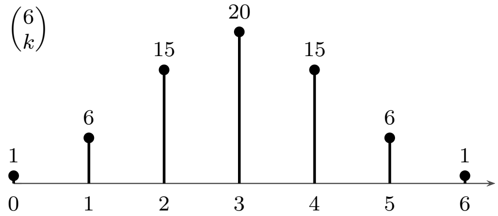
$$\binom{9}{5} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cancel{5}} = \binom{9}{4} = 126.$$

Sélectionner $k$ objets parmi $n$ revient à écarter $n-k$. Le choix d'une combinaison équivaut au choix de la combinaison complémentaire. D'où la propriété de symétrie :

$$\boxed{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}}$$

Cette symétrie est bien visible graphiquement :




Quelques coefficients binomiaux à retenir :

| | |
|---|---|
| $\binom{n}{0} = 1$ | il n'y a qu'une manière de choisir aucun objet, |
| $\binom{n}{n} = 1$ | il n'y a qu'une manière de choisir tous les objets, |
| $\binom{n}{1} = n$ | il y a $n$ manières de choisir un objet, |
| $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$ | il y a $n$ manières d'écarter un objet, |
| $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$ | impossible de choisir plus de $n$ objets. |

**Exemple 2.9.** Calcul successif des coefficients binomiaux à $n$ fixé. Pour $n = 10$ :

$$\binom{10}{0} = 1, \qquad \binom{10}{1} = 10, \qquad \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{1 \times 2} = 5 \times 9 = 45,$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9}{1 \times 2} \times \frac{8}{3} = \binom{10}{2}\frac{8}{3} = 45 \times \frac{8}{3} = 15 \times 8 = 120, \quad \binom{10}{4} = \binom{10}{3}\frac{7}{4} = 30 \times 7 = 210,$$

$$\binom{10}{5} = 210 \times \frac{6}{5} = 42 \times 6 = 252\,, \quad \binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210, \text{ ainsi de suite par symétrie}$$

**Tests**

**2.10.** Dix convives trinquent chacun avec chacun. Combien de fois les verres résonnent-ils ?

**2.11.** Combien de manières différentes y a-t-il de prendre 8 cartes dans un jeu à 32 cartes ?

**2.12.** Calculer, sans calculatrice, les coefficients binomiaux $\binom{8}{k}$ pour $k \in [\![0, 8]\!]$.

**2.13.** Sans calculatrice simplifier la fraction $\frac{11\times12\times13\times14\times15\times16}{6!}$ en un produit de nombres entiers. Est-ce un coefficient binomial ?

### Résumé du modèle de l'urne : Tirages avec/sans remise, avec/sans ordre

Le modèle classique de l'urne consiste en $k$ tirages successifs parmi $n$ boules distinctes. Il y a quatre types de tirages, à savoir avec/sans remise et avec/sans ordre. À présent on connaît les formules pour les trois premiers types :