

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	Rappels sur l'intégrale de Riemann	11
1.2	Insuffisances de l'intégrale de Riemann	13
1.2.1	L'espace n'est pas complet	13
1.2.2	Passage à la limite	15
1.2.3	Construction de l'intégrale de Lebesgue	17
1.3	Rappels	19
1.4	Problèmes et exercices	20
2	Espaces mesurables, fonctions mesurables, mesures	47
2.1	Espaces mesurables	47
2.2	Fonctions mesurables	48
2.3	Mesures	53
2.4	Mesure de Lebesgue	57
2.5	Presque partout	60
2.6	Preuve du théorème de Carathéodory	62
2.7	Problèmes et exercices	68
3	Intégration des fonctions mesurables	105
3.1	Construction de l'intégrale	105
3.1.1	Fonctions étagées positives	105
3.1.2	Fonctions mesurables positives	108
3.1.3	Fonctions mesurables	110
3.1.4	Intégrale et presque partout	113
3.2	L'espace $L^1(X, d\mu)$	114
3.2.1	Définition	114
3.2.2	Passage à la limite	115
3.3	Problèmes et exercices	123
4	Compléments sur les fonctions intégrables	151
4.1	Intégrales à paramètres	151
4.2	Théorèmes de Fubini	152
4.3	Changements de variables	155
4.4	Convolution et régularisation	161
4.4.1	Densité de C_c^0 dans L^1	162
4.4.2	Convolution	166
4.4.3	Régularisation	168
4.5	Espaces L^p	170
4.5.1	Définitions	170
4.5.2	Propriétés fondamentales des espaces L^p	172
4.6	Problèmes et exercices	176

5	Espaces de Hilbert	239
5.1	Définitions.....	239
5.1.1	Forme hermitienne.....	239
5.1.2	Produit scalaire.....	240
5.1.3	Notions de convergence.....	241
5.1.4	Espace de Hilbert.....	242
5.2	Orthogonalité; théorème de projection.....	244
5.2.1	Orthogonalité.....	244
5.2.2	Théorème de projection.....	244
5.2.3	Théorème de Riesz.....	249
5.3	Bases hilbertiennes, séries de Fourier.....	253
5.3.1	Bases hilbertiennes.....	253
5.3.2	Théorème de Parseval.....	255
5.4	Exemple fondamental : fonctions L^2 périodiques.....	256
5.5	Ce que le cas hilbertien peut nous apprendre sur les espaces de fonctions intégrables.....	266
5.5.1	Retour sur la dualité $L^p/L^{p'}$	266
5.5.2	Le théorème de Radon-Nikodym.....	274
5.6	Problèmes et exercices.....	276
6	Transformée de Fourier	335
6.1	Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$	335
6.1.1	Définition.....	335
6.1.2	Propriétés élémentaires.....	337
6.2	Algèbre de Wiener.....	339
6.2.1	Exemple fondamental et lemme d'approximation.....	339
6.2.2	Algèbre de Wiener.....	342
6.3	Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$	345
6.4	Equation de la chaleur.....	348
6.5	Problèmes et exercices.....	352
7	Théorèmes de compacité dans les L^p	391
7.1	Compléments d'analyse fonctionnelle.....	391
7.2	Compléments de topologie; topologies forte, faible et faible- \star	398
7.2.1	Espaces topologiques, espaces métriques, compacité.....	398
7.2.2	Convergence faible et convergence faible- \star	401
7.2.3	Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki.....	406
7.3	Critère de compacité faible dans les espaces L^p	409
7.3.1	Les cas $1 < p \leq \infty$	409
7.3.2	Le cas $p = 1$: théorème de Dunford-Pettis.....	412
7.3.3	Critère pratique.....	417
7.4	Equicontinuité et compacité.....	419
7.5	Compacité forte dans L^p	423
7.6	Applications : convergences faible, forte et presque partout; produits.....	427
7.7	Problèmes et exercices.....	429

Table des matières	7
Bibliographie	441
A Théorème de Stone-Weierstrass	445
Index	451

Liste des exercices et problèmes

1.1	Une caractérisation de la fonction nulle	20
1.2	Problème : intégrales, convergences simple et uniforme	20
1.3	Un piège.....	25
1.4	Problème : intégrale de Dirichlet	27
1.5	Convergences en normes L^∞ et L^1	31
1.6	Applications du théorème de Lebesgue, I	33
1.7	Bosse glissante	36
1.8	Applications du théorème de Lebesgue, II	37
1.9	Applications du théorème de Lebesgue, III	38
1.10	Applications du théorème de Lebesgue, IV	38
1.11	Approximation de la masse de Dirac	39
1.12	Continuité des translations	42
1.13	Lemme de Riemann-Lebesgue	44
1.14	Familles sommables	45
2.1	Ensembles mesurables	68
2.2	Mesure de Lebesgue	69
2.3	Sur l'approximation de réels par des rationnels	70
2.4	Théorème de Lebesgue-Stieljès	72
2.5	Mesures absolument continues	74
2.6	Mesures régulières sur \mathbb{R}^N	75
2.7	Théorème de Radon-Riesz	79
2.8	Lemme de Borel-Cantelli	87
2.9	Réflexions sur pp	87
2.10	Intégrale du module et module de l'intégrale	88
2.11	Convergence en mesure	88
2.12	Preuve du Théorème d'Egoroff	91
2.13	Problème : L'ensemble de Cantor et l'escalier du diable	93
2.14	Dénombrables, négligeables, d'intérieurs vides	101
2.15	Fonction de répartition	102
2.16	Remarques sur les fonctions intégrables	103
3.1	Intégration sur \mathbb{N}	123
3.2	Une expression de $\sum 1/n^2$	126
3.3	Retour sur l'approximation de réels par des rationnels	127
3.4	Calcul d'une intégrale	128
3.5	Propriétés d'une fonction intégrable	129
3.6	Étude d'une suite	130
3.7	Calcul d'une intégrale	131
3.8	Bis repetita	132
3.9	Limites, sommes et intégrales	134
3.10	Convergence pp et en norme	138
3.11	Convergence pp et en norme, bis	139
3.12	Calcul d'équivalent	141
3.13	Action de fonctions continues sur des fonctions intégrables	142
3.14	Une expression de $\sum 1/n^3$	144

3.15	Limite d'intégrales	145
3.16	Étude d'un opérateur sur $L^1([0, 1])$	146
3.17	Théorème de Vitali	147
4.1	Intégrales à paramètres	176
4.2	Intégrale à paramètre et calcul de l'intégrale de la gaussienne	179
4.3	Discussion sur le théorème de Fubini	180
4.4	Intégrabilité sur \mathbb{R}^N de fonctions radiales	187
4.5	Des calculs utiles	187
4.6	Retour sur l'intégrale de Dirichlet	190
4.7	Intégrale à paramètres et calcul, I	192
4.8	Intégrale à paramètres et calcul, II	193
4.9	Théorème de Fubini et calcul	196
4.10	Potentiel newtonien créé par une boule	197
4.11	Équation de transport	199
4.12	Étude d'une fonction définie par une intégrale	203
4.13	Étude d'un opérateur linéaire sur L^1	208
4.14	Calculs de sommes et intégrales	210
4.15	Encore des calculs de sommes et intégrales	212
4.16	\mathbb{C} est algébriquement clos	216
4.17	Approximation dans L^2	218
4.18	Comportement de suites dans L^p	220
4.19	Interpolation	221
4.20	Convolution dans L^p	221
4.21	Normes L^p	223
4.22	Un résultat de convergence dans L^p	225
4.23	Problème : Inégalité de Hardy	225
4.24	Problème : $W^{1,1}(I) \subset C_b^0(I)$	233
4.25	Opérateurs à noyaux	236
5.1	Projection	276
5.2	Problèmes de minimisation	278
5.3	Problème : Projection sur un convexe	281
5.4	Autour de Lax-Milgram	285
5.5	Formulation variationnelle	287
5.6	Séries de Fourier	291
5.7	Précision spectrale de la méthode des rectangles	292
5.8	Contre-exemple de Du Bois Reymond	294
5.9	Sur la convergence ponctuelle des séries de Fourier	301
5.10	Problème : Convergence ponctuelle des séries de Fourier, noyau de Dirichlet, théorème de Dirichlet	302
5.11	Problème : sur un opérateur compact défini en termes de série de Fourier	311
5.12	Équation de la chaleur et équation des ondes	317
5.13	Fonctions harmoniques	321
5.14	Opérateur défini sur un espace de Hilbert	326
5.15	Problème : analyse spectrale des opérateurs compacts	329
6.1	Calculs de transformées de Fourier	352
6.2	Chirps	354

6.3	Espace de Schwartz	355
6.4	Principe d'incertitude de Weyl-Heisenberg	357
6.5	Problème : Formule sommatoire de Poisson	360
6.6	Problème : Théorème d'échantillonnage de Shannon	363
6.7	Calcul d'une transformée de Fourier	374
6.8	Problème : Formule d'inversion et égalité d'énergie	379
6.9	Théorème de Sobolev	385
6.10	Opérateur commutant avec les translations	386
6.11	Phénomène de Gibbs	389
7.1	Problème : homogénéisation	429
7.2	Problème : suites de mesures et passage à la limite	435