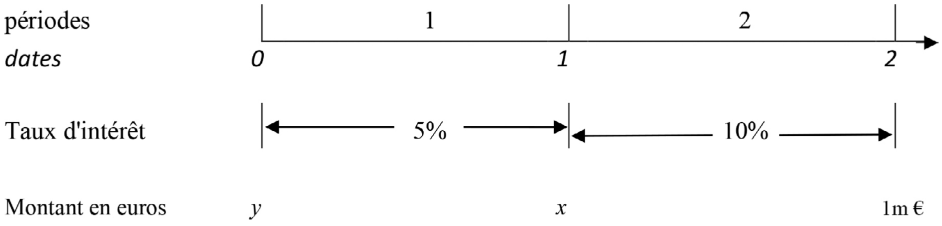
Section 1

La valeur du temps

On va montrer qu'une somme d'argent n'a pas le même sens selon qu'elle est possédée aujourd'hui ou à une autre date, même lorsqu'elle est perçue sans risque ; c'est un des éléments clefs à prendre en compte dans les décisions financières.

Puisque l'on considère une situation sans risque de défaut et sans frais de transaction, il est normal de considérer que l'on peut prêter ou emprunter au même taux d'intérêt (en revanche s'il y avait un risque de défaut, le taux d'un emprunt deviendrait supérieur au taux d'un placement), le taux d'intérêt reflète la rémunération liée au transfert d'argent du présent vers le futur, une rémunération qui est le plus souvent positive mais que rien n'interdit d'être négative pour des institutions financières[1].

La flèche du temps peut être représentée par le diagramme suivant, où l'on a indiqué les dates, les périodes et un exemple de taux d'intérêt pour chaque période. On s'intéresse à une situation où l'on possédera 1 million d'euros à la date 2 pour examiner comment cet argent peut se transformer dans le temps.



Si dans deux années je dispose de 1 m€ et que le taux d'intérêt est de 10 % entre le début et la fin de la deuxième année, il est équivalent d'avoir cette somme (1 m€) à la date 2 ou bien de posséder à la date 1 une certaine somme notée x que l'on obtient grâce à un emprunt, que l'on peut obtenir facilement sous l'hypothèse que tous les engagements sont respectés tout le monde, puisque la connaissance commune est que 1 m€ seront disponibles à la date 2. La somme est à emprunter en payant un taux d'intérêt de 10 % dans cet exemple, si bien qu'à la date 2 devront être versés le remboursement du capital emprunté (x) et le paiement des intérêts

1. Pour des particuliers qui n'ont que de petites sommes en jeu, le taux d'intérêt négatif n'est guère envisageable car il suffirait pour ne pas payer son placement et de garder les espèces chez soi pour les utiliser dans le futur. Pour des institutions financières, garder des sommes importantes de liquidité entraînerait en revanche des frais de gardiennage trop élevés.

(10 %.*x*). Le montant maximum empruntable pour correspondre aux possibilités de remboursement est donc défini par la relation suivante :

$x\ .\ (1 + 10\,\%) = 1$ m€ ; soit

$$x = \frac{1\ 000\ 000\ €}{1{,}10} = 909\,091\ €$$

ainsi on a une équivalence qui ne porte pas sur des sommes mais sur des couples {*somme, date*} d'où les deux relations :

$$909\,091\ € < 1\,000\,000\ €$$

et

$$\{909\,091\ €\ \text{dans 1 an}\} = \{1\,000\,000\ €\ \text{dans 2 ans}\}$$

Remarque : la somme de 900 000 € n'intervient jamais, on n'a pas enlevé 10 % de 1 000 000 € pour trouver ce résultat, un tel calcul refléterait une erreur de raisonnement.

Cet exemple montre qu'une somme d'argent qui « voyage » dans le temps n'est pas stable. Lorsque le taux d'intérêt est positif, elle s'accroît en s'éloignant vers le futur, elle se réduit lorsque l'on se rapproche du présent. La situation est inversée lorsque les taux d'intérêt sont négatifs. Les déterminants des taux d'intérêt seront exposés au chapitre 3 de cet ouvrage.

On peut remonter encore une fois dans le temps de la même façon jusqu'à la date 0. Si le taux d'intérêt entre le début et la fin de la première année est de 5 %, il est équivalent en fin de période *1* d'avoir ces 909 091 € ou d'avoir aujourd'hui une somme *y* qui peut donner lieu à un paiement de 909 091 € après une période. Comme précédemment, on a :

$$y = \frac{909\ 091\,€}{1+5\%} = 865\,801\ €$$

Ces deux équivalences mises bout à bout indiquent que 1 m€ dans deux ans sont équivalents *aujourd'hui* (date 0) à la somme *y* du schéma précédent avec :

$$y = \frac{909\ 091\,€}{1+5\%} = \frac{1\ 000\ 000\ € \big/ (1+10\%)}{(1+5\%)} = \frac{1\ 000\ 000\ €}{(1+5\%)\cdot(1+10\%)} = 865\,801\ €$$

Vocabulaire : On dit que 1 m€ dans deux ans ont une *valeur présente* de 865 801 € ou symétriquement que la *valeur future* de 865 801 € dans deux ans est de 1 m€.[1]

1. Dans ce qui vient d'être montré, on a supposé que l'on connaissait aujourd'hui (à la date 0) le taux d'intérêt de 10 % ; ceci n'est pas toujours le cas puisque ce taux est celui qui sera présent sur les marchés à la date 1, c'est-à-dire dans un futur pas toujours spécifié en *t = 0*. Mais, en tout état de cause, même si le taux n'est pas connu, il n'en demeure pas moins vrai que la valeur d'une somme d'argent n'est pas la même à la date 0 ou à la date 2.

Application

On se place dans les mêmes conditions de taux d'intérêt que précédemment et l'on considère que ces taux vous sont aussi accessibles personnellement. Vous travaillez dans une salle de marché, et vous avez fait faire cette année de grands bénéfices à votre employeur. Vous allez recevoir un bonus exceptionnel et votre employeur vous demande de choisir entre deux propositions :

a) Recevoir 15 000 € dans deux ans,

b) Recevoir 14 000 € dans un an.

Quel est votre choix ?

Se précipiter sur le chiffre le plus élevé n'est pas forcément judicieux, car 14 000 et 15 000 ne sont pas affectés à la même date. Ces deux propositions doivent pouvoir se comparer au même moment.

Mais faut-il comparer cette alternative à la date 2 ou à la date 1 ? Avant de répondre, examinons les deux possibilités.

(i) En se plaçant au terme des deux périodes (t = 2) :

Les 14 000 € dans un an peuvent être placés au taux de 10 % et produire 15 400 € à la fin de la deuxième période, le choix *(b)* est plus avantageux que la première proposition *(a)* de recevoir 15 000 € à cette même date finale.

(ii) En se plaçant au terme d'une seule période (t = 1) :

On possède soit 14 000 € directement avec le choix (*b*), soit avec le choix (*a*) une somme qui correspond à un emprunt dont le remboursement et les intérêts doivent être de 15 000 € à la date 2, soit une somme disponible à la date 1 de 15 000 €/(1 + 10 %) = 13 636 €. De nouveau, le choix *(b)* est plus avantageux que la proposition (*a*).

(iii) Et pourquoi ne pas envisager de comparer l'alternative en se fixant comme date de référence aujourd'hui, la date 0 ?

La proposition *(b)* correspond à 14 000/(1 + 5 %) aujourd'hui, soit 13 333 €, ce qui est plus élevé que la première proposition (*a*) d'une valeur de 13 636/(1 + 5 %) aujourd'hui, soit 12 987 €.

Sur cet exemple, le classement est similaire quelle que soit la date de référence, même si les nombres sont différents ; ce qui importe est seulement de se fixer une même date de référence pour comparer différentes sommes d'argent.

La raison en est que le déplacement dans le temps affecte proportionnellement de la même façon chaque montant. Par exemple pour passer de t = 1 à t = 2, on multiplie la somme initiale par (1 + taux d'intérêt), pour aller en sens inverse de t = 2 à t = 1 on divise par le même nombre :

t=1		*t=2*
a) 13 636 €	⟵ (1+10%) ⟶	**15 000 €**
b) **14 000 €**	⟵ (1+10%) ⟶	15 400 €

De même pour le passage entre les dates 1 et 0, on a :

t=0		*t=1*
a) 12 987 €	$\xleftrightarrow{\quad(1+5\%)\quad}$	13 636 €
b) 13 333 €	$\xleftrightarrow{\quad(1+5\%)\quad}$	**14 000 €**

Le taux d'intérêt moyen annualisé

On vient de voir que le passage du temps implique une transformation des sommes d'argent ; en reprenant le premier exemple, la valeur de 1 m€ à la date 2 est égale à la somme de 865 801 € à la date 0, selon la relation :

$$865\,801\text{ €} = \frac{1\,000\,000\text{ €}}{(1+5\%)\cdot(1+10\%)}$$

Au dénominateur de la fraction à droite de la relation se trouve le produit de chaque taux d'intérêt plus 1 de chaque période. On peut vouloir, de façon quelque peu artificielle, remplacer ces deux taux par un taux unique, noté $\bar{\iota}$, mais à condition de garder le même résultat, ce qui s'écrit :

$$(1+5\%)\cdot(1+10\%) = (1+\bar{\iota})\cdot(1+\bar{\iota})$$

soit :

$$1{,}155 = (1+\bar{\iota})^2$$

$$\bar{\iota} = \sqrt{1{,}155} - 1 = 7{,}47\ \%$$

On peut donc aussi écrire le montant de 865 801 € de la valeur présente du premier exemple comme étant égal à $\frac{1m€}{(1+7{,}47\%)^2}$, ce qui a l'avantage de ne faire figurer qu'un seul taux virtuel, qui est appelé le *taux d'intérêt moyen annualisé*, entre la date présente et la fin de la deuxième année (en anglais : « *yield to maturity* »)

Attention : le taux d'intérêt moyen des deux taux de 5 % et 10 % n'est pas 7,50 % mais bien 7,47 % ; en finance un taux d'intérêt moyen sur plusieurs périodes n'est *pas* une moyenne de type arithmétique.

Ce taux d'intérêt moyen s'interprète comme le taux de rémunération que l'on obtient globalement à chaque période sur un placement de 2 ans.

Pour des durées plus longues, lorsque l'on place une somme d'argent W_0 pendant n périodes avec des taux successifs i_t, $t = 1$ à n étant un indice de période temps, le taux d'intérêt moyen est défini par la relation suivante qui retrace à gauche un placement fait à un taux unique – qui est donc le taux moyen – et à droite le même placement avec les taux effectivement présents sur les marchés :

$$W_0\cdot\underbrace{(1+\bar{\iota})\cdot(1+\bar{\iota})\ldots\cdot(1+\bar{\iota})}_{n\ \textit{fois}} = \underbrace{W_0\cdot(1+i_1)\cdot(1+i_2)\ldots\cdot(1+i_n)}_{\text{valeur future du placement}}$$

soit :

$$(1+\bar{\iota})^n = (1+i_1)\cdot(1+i_2)\ldots\cdot(1+i_n)$$

Plus généralement, on peut écrire la définition du taux d'intérêt moyen $\bar{\iota}$ sur *n* périodes :

$$(valeur\ \ initiale)\cdot(1+\bar{\iota})^n = (valeur\ \ future)$$

soit :

$$(1+\bar{\iota})^n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{valeur future}}{\text{valeur initiale}}$$

Remarque :
La valeur initiale, ou valeur présente, présente une caractéristique qui sera utile plus tard :

$$valeur\ \ présente\ = \frac{valeur\ \ future}{(1+\bar{\iota})^n}$$

Ce taux d'intérêt moyen résulte de la comparaison de seulement deux flux financiers, le placement initial, alias la valeur présente de la richesse, et la richesse finale, alias la valeur future. Lorsqu'il y a plus de deux flux à prendre en compte – des flux lors de dates intermédiaires – et que l'on veut savoir ce qu'ils rapportent globalement, il n'est plus possible de calculer un taux moyen annualisé de cette manière car le montant du placement ne peut pas être mis en facteur commun ; la notion de « moyenne » sera calculée de façon plus générale par le *taux de rentabilité interne* qui sera vue au chapitre suivant.

L'intuition manquante de la valeur du temps

Pourquoi faut-il apprendre que le temps a de la valeur ? Pourquoi n'en a-t-on pas l'intuition *a priori* ?

Une des raisons est la différence entre les sommes maniées par un individu et celles en jeu dans une institution financière.

Une personne qui laisse non placée pendant 15 jours la somme de 2 000 € va perdre seulement 1,67 euro lorsque le taux d'intérêt est de 2 %. Mais une banque qui laisse oisifs pendant cette période 100 millions € perdrait par négligence environ 83 000 € ! L'ordre de grandeur est en réalité bien supérieur à cet exemple, même avec un taux d'intérêt de 2 % les intérêts peuvent s'élever à 57 millions sur 15 jours pour une grande banque comme le Crédit Agricole (dont l'actif « en caisse » – c'est-à-dire disponible – est de 68 milliards d'euros en 2013). Évidemment, les intérêts en jeu seraient plus importants pour des périodes plus longues.

Ainsi, quelques jours non gérés financièrement sont négligeables pour un individu, mais en revanche lourds de conséquences pour une institution financière.

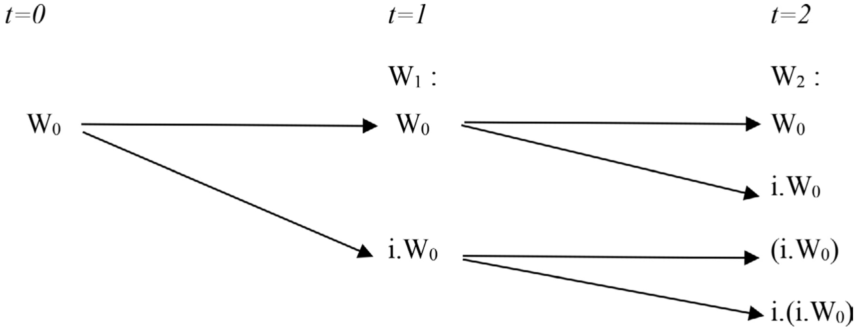
SECTION 2

Le calcul des intérêts

Les intérêts sont versés aux dates prévues par le contrat financier, dans un mois, ou six mois, ou un an par exemple. Le taux d'intérêt est cependant toujours exprimé en taux annuel (annualisé). La façon dont on exprime un taux annualisé alors que la créance a une maturité différente d'un an est explicitée ci-dessous, sous deux formes : le taux d'intérêt peut être exprimé de façon « capitalisée » ou bien « proportionnelle ». Ces deux définitions peuvent être rendues équivalentes mais en changeant le nombre apparent, et la modalité de calcul est explicitée dans le contrat lui-même. De la même manière que la température ambiante ne change pas lorsqu'on la calcule en degré Celsius ou en degré Fahrenheit, les intérêts ne changent pas de nature selon que l'on exprime le taux en capitalisé ou en proportionnel, à condition bien sûr de changer les chiffres en fonction de l'unité de mesure.

Les taux d'intérêt capitalisés (ou composés)

Lorsque l'on a considéré le taux d'intérêt moyen sur deux années, on a calculé qu'un euro aujourd'hui produisait avec ce taux $(1+i)^2$ à la fin des deux périodes (avec i = 7,47 % dans notre exemple). Cela correspond au fait que les intérêts perçus à la première période sont de nouveau placés (c'est un nouveau capital) et rapportent eux aussi des intérêts. Pour un capital initial W_0, les placements sont les suivants :



Le montant obtenu après ces opérations W_2 (appelé aussi *valeur acquise à la date 2*) est :

$$W_2 = W_0 + i \cdot W_0 + i \cdot W_0 + i^2 \cdot W_0$$
$$= W_0 \cdot (1+i)^2$$

On peut aussi décrire la même chose sous une forme légèrement différente avec les opérations suivantes à chaque date :

$t = 0$: on place W_0 au taux i (en s'engageant sur 2 ans)

$t = 1$: on reçoit les intérêts, que l'on place aussi au taux i ; le nouveau capital placé W_1 est donc le capital initial et les intérêts de la première période, soit $W_0 \cdot (1 + i)$

$t = 2$: on touche les intérêts du capital précédent, $[W_0 \cdot (1 + i)].i$, et l'on récupère ce capital de $t = 1$, soit $W_0.(1 + i)$. Au total on a après 2 périodes :

$$W_2 = [W_0 \cdot (1 + i)] \cdot i + W_0 \cdot (1 + i)$$
$$= W_0 \cdot (1+i)^2$$

L'appellation intérêts capitalisés (ou composés) vient donc du fait que les intérêts de la première période servent de capital qui est placé jusqu'à l'échéance.

Plus généralement, la valeur finale d'un placement au taux d'intérêt i sur n années est[1] :

$$W_n = W_0 \cdot (1+i)^n$$

Le taux d'intérêt infra-annuel capitalisés

La vitesse moyenne d'un véhicule pendant une demi-heure est exprimée en km/heure, même si le parcours ne dure pas une heure entière. De même, le taux d'intérêt est toujours exprimé pour une période d'un an, quelle que soit la maturité de l'opération. Ainsi, pour une opération sur 6 mois, le taux exprimé sera celui d'une année entière.

Lorsque l'on choisit d'exprimer les intérêts sur 6 mois de façon capitalisée (ce n'est pas le choix le plus courant) avec un taux annualisé de 10 %, cela veut dire que si l'on prolonge le placement pendant une deuxième période de 6 mois, on doit obtenir au bout d'un an 10 % d'intérêts.

En notant j le taux d'intérêt *non annualisé* sur 6 mois (celui que vous ne verrez jamais écrit sur un document), on obtient au bout d'une demi-année la richesse suivante :

$$W_{1/2} = W_0 \cdot (1 + j)$$

1. Une formulation mathématique autre est parfois utilisée lorsque la période de temps est très courte et que l'on utilise quand même des intérêts capitalisés, car le taux d'intérêt sur une période courte est numériquement proche de zéro, ce qui permet d'utiliser une approximation mathématique suivante pour t périodes : $(1 + i)^t = \exp \mathrm{Ln}(1 + i)^t = \exp [t \cdot \mathrm{Ln}(1 + i)]$ avec i petit on a $\mathrm{Ln}(1 + i) \approx i$ d'où : $(1 + i)^t \approx e^{i \cdot t}$.

et en replaçant aux mêmes conditions de nouveau sur 6 mois, on obtient :

$$W_1 = W_{1/2} \cdot (1 + j)$$
$$= W_0 \cdot (1 + j)^2$$

Le taux annuel étant par hypothèse de 10 %, on doit aussi avoir :

$$W_1 = W_0 .(1 + 10\ \%)$$

On en déduit :

$$(1 + j)^2 = (1 + 10\ \%)$$
$$1 + j = \sqrt{1{,}10}$$
$$j = 4{,}88\ \%$$

Remarque : le taux capitalisé sur 6 mois est inférieur à 5 % ; avec un taux annuel de 10 %, le taux sur une demi-période est inférieur à 10 %/2.

Exemple inversé : Environ 2,5 millions d'Américains empruntent à très court terme pour faire face à des fins de mois difficiles. L'emprunt typique porte sur 350 $ pendant ½ mois, et coûte 15 $ pour chaque tranche de 100 $ empruntée (source : *The Economist*, 08/04/2017, p. 65). En comptant des taux d'intérêt capitalisés, quel est le taux d'intérêt annuel (i) de cette opération ?

Réponse : On peut partir d'une remarque banale qui est que les intérêts payés par l'un sont les intérêts reçus par l'autre, et donc qu'il doit en être de même pour le calcul du taux d'intérêt annualisé. Précédemment, on s'intéressait à un placement que l'on renouvelait virtuellement pendant une période d'un an pour trouver ce taux. Lorsque l'on s'intéresse à un emprunt, il s'agit donc de renouveler virtuellement l'emprunt pendant un an, et de le rembourser seulement à cette échéance. Ici, on emprunte 100 $ pendant 15 jours, puis on emprunte de nouveau pendant 15 jours un montant supérieur à 100 $ pour rembourser le premier emprunt avec ses intérêts de 15 $, etc. Ce qui doit être remboursé *in fine* est donc la somme W_1 suivante :

$W_1 = (1 + 15\ \%)^{24} = (1 + i)$; soit un taux d'intérêt annuel $i = 2763\ \%$

Les taux d'intérêt simples, appelés aussi proportionnels

Lorsqu'un contrat spécifie que les intérêts doivent être calculés ainsi, le montant des intérêts à l'intérieur d'une année est calculé de façon proportionnelle au nombre