Ensembles 1

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

1) $X = \overline{A} \cap (A \cup \overline{B})$ 2) $Y = A \cup (\overline{\overline{A} \cup B})$ 3) $Z = \overline{A \cap B} \cap B$ 4) $T = A \cap \overline{A \cup B}$.

Exercice 2

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

1) $X = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ 2) $Y = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.

Exercice 3

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
Simplifier $X = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 4

Soient A et B les parties de $\mathbb{R}^2$ définies par $A = [2, 4] \times [2, 5]$ et $B = [-1, 3] \times [0, 4]$.
Déterminer $A \cap B$.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}$. Soient A et B les parties de E définies par $A =]-\infty, 1[$ et $B = [-2, +\infty[$.
Expliciter les ensembles suivants :

1) $A \cap B$ 2) $A \cup B$ 3) $A \cap \overline{B}$ 4) $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 6

Reprendre l'exercice précédent avec $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 2\}$.

Exercice 7

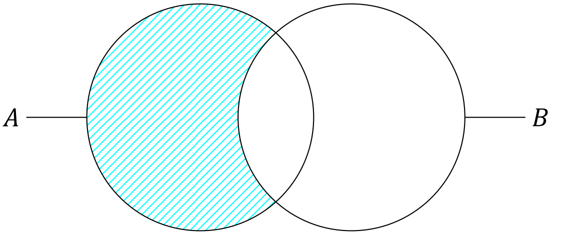
1) Soient $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ et $C = \{3, 4\}$.
Expliciter, puis comparer les ensembles $A \times (B \cup C)$ et $(A \times B) \cup (A \times C)$.
2) Soient E et F deux ensembles. Le résultat précédent est-il encore valable pour toute partie A de E et toutes parties B et C de F ?

Exercice 8 ⋆

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Montrer que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice 9 ⋆ *Différence de deux ensembles*

Quelles que soient les parties A et B d'un ensemble E, on appelle *différence* de A et B, la partie de E, notée $A \setminus B$ définie par : $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.



1) Écrire $A \setminus B$ comme l'intersection de deux parties de E.
2) Déterminer $A \setminus A$, $A \setminus \emptyset$ et $E \setminus A$.
3) Montrer que si $A \setminus B = A$ alors $B \setminus A = B$.
4) Montrer que $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.

Exercice 10 ⋆

Quelles que soient les parties A et B d'un ensemble E, on définit l'opération Δ entre A et B, notée $A\Delta B$ par : $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ où « $\setminus$ » est la différence mentionnée précédemment.
1) Vérifier que cette opération est commutative, c'est-à-dire que $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$ pour toutes parties A et B de E.
2) Déterminer $A \,\Delta\, A$ et $A \,\Delta\, \emptyset$.
3) En appliquant deux fois la distributivité et en utilisant que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, montrer que $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
4) Montrer que $(A \,\Delta\, B) \cap C \subset A \,\Delta\, (B \cap C)$, puis étudier l'inclusion réciproque en prenant $E = \mathbb{R}$, $A = [-2, 2]$, $B = [1, 3]$ et $C = [-3, 0]$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 11

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1) Montrer que $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$.
2) Montrer que $(A \times B) \cup (B \times A) \subset (A \cup B) \times (A \cup B)$.
3) On prend $E = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$ et $B = [1, 2]$.
   Représenter dans un plan rapporté à un repère orthonormé les ensembles $A \times B$ et $B \times A$, puis comparer $(A \times B) \cup (B \times A)$ et $(A \cup B) \times (A \cup B)$. Que peut-on conclure ?

Exercice 12

Soit E un ensemble.
Soient X, Y et Z des parties de E telles que $Y \subset Z$.

1) Comparer $X \cap Y$ et $X \cap Z$.
2) Comparer $X \cup Y$ et $X \cup Z$.

Exercice 13

Soit E un ensemble.

1) Montrer que pour toutes parties A, B et C de E, on a : $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$.
2) Vérifier que l'inclusion précédente n'est pas en général une égalité en prenant $B = \overline{A}$ et $C = E$.

Exercice 14

Soient A et B deux parties d'un ensemble E telles que $A \cup B = A \cap B$.
Montrer que $A = B$.

Exercice 15 ★★

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E telles que $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$.
Montrer que $B \subset C$.

Exercice 16

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Montrer que $A \cup B = B \cap C \Longleftrightarrow A \subset B \subset C$.

Exercice 17 ★★

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Montrer que si $A \cap B = A \cap C$, alors $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

Exercice 18 ⋆⋆ *Algèbre de Boole*

Soit E un ensemble non vide.
On dit que $\mathscr{A}$ est une *algèbre de Boole* sur E si :
- $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$
- $E \in \mathscr{A}$
- $X \in \mathscr{A} \Longrightarrow \overline{X} \in \mathscr{A}$ *(stabilité par complémentaire)*
- $(X \in \mathscr{A}$ et $Y \in \mathscr{A}) \Longrightarrow X \cup Y \in \mathscr{A}$ *(stabilité par réunion)*

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Boole sur E.

1) Montrer que $\mathscr{A}$ est stable par intersection.
2) Soit B une partie de E.
Montrer que $\mathscr{B} = \{A \cap B, A \in \mathscr{A}\}$ est une algèbre de Boole sur B.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 19 ⋆⋆

Dans tout l'exercice, E désigne un ensemble non vide.
1) Trouver un exemple très simple d'algèbre de Boole sur E.
2) Soit A une partie de E. Déterminer la plus petite algèbre de Boole sur E contenant A.
3) On suppose dans cette question que E est infini.
$\mathscr{A} = \left\{A \in \mathscr{P}(E) \mid A \text{ fini ou } \overline{A} \text{ fini}\right\}$ est-elle une algèbre de Boole sur E ?

Exercice 20 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel.
Soit C l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $|x| + |y| \leqslant n$.
Peut-on écrire C sous la forme d'un produit cartésien de deux parties de $\mathbb{Z}$?

Exercice 21 ⋆⋆

Soient $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\right\}$ et $F = \left\{(a - b, 2a + b, b); (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
Les ensembles E et F sont-ils égaux ?

Exercice 22 ⋆⋆

Pour tout réel t, on considère $D_t = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = t(x + \sqrt{2})\right\}$.
On note $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$.
Combien C et D_t ont-ils de points en commun ?

Exercice 23 ⋆⋆

Soit A une partie d'un ensemble E.
Soient Y une partie de A et Z une partie de $\overline{A}$.
Déterminer $\mathscr{F} = \left\{X \in \mathscr{P}(E) \mid X \cap A = Y \text{ et } X \cap \overline{A} = Z\right\}$.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) $$\begin{aligned} X &= \overline{A} \cap (A \cup \overline{B}) \\ &= (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) && \text{distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup \\ &= \emptyset \cup \overline{A \cup B} && \text{relation de Morgan} \\ &= \overline{A \cup B}. \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} Y &= A \cup (\overline{A \cup B}) \\ &= A \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) && \text{relation de Morgan} \\ &= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) && \text{distributivité de } \cup \text{ par rapport à } \cap \\ &= E \cap (A \cup \overline{B}) \\ &= A \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} Z &= \overline{A \cap B} \cap B \\ &= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap B && \text{relation de Morgan} \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap B) && \text{distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup \emptyset \\ &= \overline{A} \cap B. \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} T &= A \cap \overline{A \cup B} \\ &= A \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) && \text{relation de Morgan} \\ &= (A \cap \overline{A}) \cap \overline{B} && \text{associativité de } \cap \\ &= \emptyset \cap \overline{B} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Exercice 2

1) $$\begin{aligned} X &= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A \cap (B \cup \overline{B}) && \text{distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup \\ &= A \cap E \\ &= A. \end{aligned}$$

2) $Y = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
$= A \cup (B \cap \overline{B})$
$= A \cup \emptyset$
$= A.$

distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$

Exercice 3

D'après l'exercice 2, on a : $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.
En remplaçant A par $\overline{A}$, on obtient de même : $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A}$.
On déduit que $X = A \cup \overline{A} = E$.

Exercice 4

$$\begin{aligned}(x,y) \in A \cap B &\Leftrightarrow (x,y) \in A \text{ et } (x,y) \in B\\ &\Leftrightarrow (x \in [2,4] \text{ et } y \in [2,5]) \text{ et } (x \in [-1,3] \text{ et } y \in [0,4])\\ &\Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 4 \text{ et } 2 \leqslant y \leqslant 5 \text{ et } -1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 4\\ &\Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } 2 \leqslant y \leqslant 4\\ &\Leftrightarrow x \in [2,3] \text{ et } y \in [2,4]\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in [2,3] \times [2,4].\end{aligned}$$

Donc $A \cap B = [2,3] \times [2,4]$.

Exercice 5

1) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B \Leftrightarrow x < 1$ et $x \geqslant -2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x < 1$.
Donc $A \cap B = [-2, 1[$.
2) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B \Leftrightarrow x < 1$ ou $x \geqslant -2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
Donc $A \cup B = \mathbb{R}$.
3) $x \in A \cap \overline{B} \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin B \Leftrightarrow x < 1$ et $x < -2 \Leftrightarrow x < -2$.
Donc $A \cap \overline{B} =]-\infty, -2[$.
4) $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Leftrightarrow x \notin A$ et $x \notin B \Leftrightarrow x \geqslant 1$ et $x < -2$.
Les conditions obtenues sont incompatibles donc $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

Remarque
La formule de Morgan donne : $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{\mathbb{R}} = \emptyset$.

Exercice 6

1) $A \cap B = \{0,1\} \cap \{1,2\} = \{1\}$.
2) $A \cup B = \{0,1\} \cup \{1,2\} = \{0,1,2\}$.
3) $A \cap \overline{B} = \{0,1\} \cap \{0,3\} = \{0\}$.
4) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{\{0,1,2\}} = \{3\}$.

Exercice 7

1) Par définition du produit cartésien, on a :

$$\begin{aligned} A\times(B\cup C) &= \{(x,y);\, x\in A \text{ et } y\in B\cup C\} \\ &= \{(x,y);\, x\in\{1,2\} \text{ et } y\in\{2,3,4\}\} \\ &= \{(1,2);(1,3);(1,4);(2,2);(2,3);(2,4)\} \end{aligned}.$$

$$\begin{aligned} (A\times B)\cup(A\times C) &= \{(x,y);\, x\in A \text{ et } y\in B\}\cup\{(x,y);\, x\in A \text{ et } y\in C\} \\ &= \{(x,y);\, x\in\{1,2\} \text{ et } y\in\{2,3\}\}\cup\{(x,y);\, x\in\{1,2\} \text{ et } y\in\{3,4\}\} \\ &= \{(1,2);(1,3);(2,2);(2,3)\}\cup\{(1,3);(1,4);(2,3);(2,4)\} \\ &= \{(1,2);(1,3);(1,4);(2,2);(2,3);(2,4)\} \end{aligned}.$$

On conclut que $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

2) L'égalité ci-dessus se généralise. En effet :

$$\begin{aligned} (x,y)\in A\times(B\cup C) &\Longleftrightarrow (x\in A) \text{ et } (y\in B\cup C) \\ &\Longleftrightarrow (x\in A) \text{ et } (y\in B \text{ ou } y\in C) \\ &\Longleftrightarrow (x\in A \text{ et } y\in B) \text{ ou } (x\in A \text{ et } y\in C). \\ &\Longleftrightarrow (x,y)\in A\times B \text{ ou } (x,y)\in A\times C \\ &\Longleftrightarrow (x,y)\in (A\times B)\cup(A\times C) \end{aligned}$$

Ces équivalences montrent que $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

Remarque
On peut établir de même que $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.
L'opération $\times$ est donc distributive par rapport à $\cup$ et $\cap$.

Exercice 8

Pour toutes parties A, B et C de E, on a :

$$\begin{aligned} &(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A) \\ &= (A\cup B)\cap(C\cup B)\cap(C\cup A) && \text{distributivité} \\ &= \big((A\cap C)\cup B\big)\cap(C\cup A) && \text{distributivité} \\ &= \big((A\cap C)\cap(C\cup A)\big)\cup\big(B\cap(C\cup A)\big) && A\cap C\subset C\cup A \\ &= (A\cap C)\cup\big(B\cap(C\cup A)\big) && \text{distributivité} \\ &= (A\cap C)\cup\big((B\cap C)\cup(B\cap A)\big) \\ &= (A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A). \end{aligned}$$

Exercice 9

1) $A\setminus B=A\cap\overline{B}$.

2) $A \setminus A = A \cap \overline{A} = \emptyset.$
$A \setminus \emptyset = A \cap \overline{\emptyset} = A \cap E = A.$
$E \setminus A = E \cap \overline{A} = \overline{A}.$

3) Utilisons l'écriture vue à la première question. Supposons que $A \cap \overline{B} = A$. On a alors :

$$\begin{aligned}
B \cap \overline{A} &= B \cap \overline{A \cap \overline{B}} && \text{relation de Morgan}\\
&= B \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}})\\
&= B \cap (\overline{A} \cup B) && \text{distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup\\
&= (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap B)\\
&= B.
\end{aligned}$$

Donc $B \setminus A = B$.

4) $$\begin{aligned}
A \setminus (A \cap B) &= A \cap \overline{A \cap B} && \text{relation de Morgan}\\
&= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) && \text{distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup\\
&= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})\\
&= \emptyset \cup (A \cap \overline{B}).
\end{aligned}$$

D'où $A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B} = A \setminus B$.

Exercice 10

1) $B \,\Delta\, A$
$= (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$
$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$= A \,\Delta\, B.$

2) $A \,\Delta\, A$
$= (A \setminus A) \cup (A \setminus A)$
$= \emptyset \cup \emptyset$
$= \emptyset\,.$

$A \,\Delta\, \emptyset$
$= (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A)$
$= A \cup \emptyset$
$= A.$