Énoncé

Exercice 1 QCM

5 points

Question 1

L'inéquation $e^{-3x} > 0$ d'inconnue x a pour ensemble de solutions :

a. $\mathbb{R}$ **b.** $]0\,;+\infty[$ **c.** $]-\infty\,;0[$ **d.** $\varnothing$

Question 2

Pour tout réel x, $\left(1-e^{x}\right)^2$ est égal à :

a. $1-e^{2x}$ **b.** $1+e^{2x}$ **c.** $1-2e^{x}+e^{2x}$ **d.** $1-e^{\left(x^2\right)}$

Question 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{4x+2}$.

Pour tout réel x, $f'(x)$ est égale à :

a. e^{4} **b.** $4e^{4x}$ **c.** $4e^{4x+2}$ **d.** $4xe^{4x+2}$

Question 4

Dans un repère orthonormé, la droite passant par $A(7\,;4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ a pour équation :

a. $-x-2y+15=0$ **b.** $-x+2y+1=0$

c. $x-2y-1=0$ **d.** $x-2y+1=0$

Question 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère l'équation de cercle $x^2+6x+(y-2)^2=3$. Son centre a pour coordonnées :

a. $(-3;2)$ **b.** $(-3;-2)$ **c.** $(3;-2)$ **d.** $(3;2)$

Exercice 2

5 points

Un salon de manucure propose à ses clientes qui viennent pour un soin classique deux prestations supplémentaires cumulables :

- la pose de faux ongles ;
- la french manucure.

Il apparaît que 30 % des clientes demandent une french manucure. Parmi celles qui ne veulent pas de french manucure, 80 % des clientes demandent une pose de faux ongles. Par ailleurs, 9 % des clientes demandent les deux prestations supplémentaires (c'est-à-dire une french manucure et une pose de faux ongles).

On interroge une cliente au hasard.

On notera M l'événement « La cliente souhaite une french manucure ».
On notera O l'événement « La cliente souhaite une pose de faux ongles ».

1. Donner les valeurs de $p(M)$, $p(M\cap O)$ et $p_{\overline{M}}(O)$.

2. Faire un arbre de probabilité traduisant la situation.

3. Calculer la probabilité que la cliente ne souhaite aucune prestation supplémentaire.

4. Montrer que la probabilité de l'événement O est égale à 0,65.

5. Les événements M et O sont-ils indépendants ?

Exercice 3

5 points

Partie A

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0=0,3$.

1. Calculer u_{14} puis u_{20}.

2. Calculer la somme des 15 premiers termes de la suite (u_n), c'est-à-dire la somme $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{14}$.

3. Compléter l'algorithme suivant permettant de déterminer le plus petit entier n tel que la somme des $n+1$ premiers termes de la suite dépasse 10 000.

```
U ← 0,3
S ← U
N ← 0
Tant que …
    U ← …
    S ← …
    N ← N+1
Fin tant que
Afficher N
```

Partie B

Nicolas a reçu à sa naissance 30 centimes d'euros par ses parents. Ils doublent le montant d'une année sur l'autre jusqu'aux 14 ans de leur enfant.

1. La somme totale versée par les parents de Nicolas permet-elle de lui payer un scooter d'une valeur de 10 000 € ?

2. Dans le cas contraire, combien lui manquera-t-il ?

Exercice 4

5 points

Sur le dessin de la page suivante, la distance entre les deux poteaux de rugby (celui de gauche et celui de droite) est de : $GD = 5{,}6$ mètres.

Les points G, D et C sont alignés dans cet ordre.

On appelle T le point où se trouve un ballon de rugby. Le triangle TCG est rectangle en C.

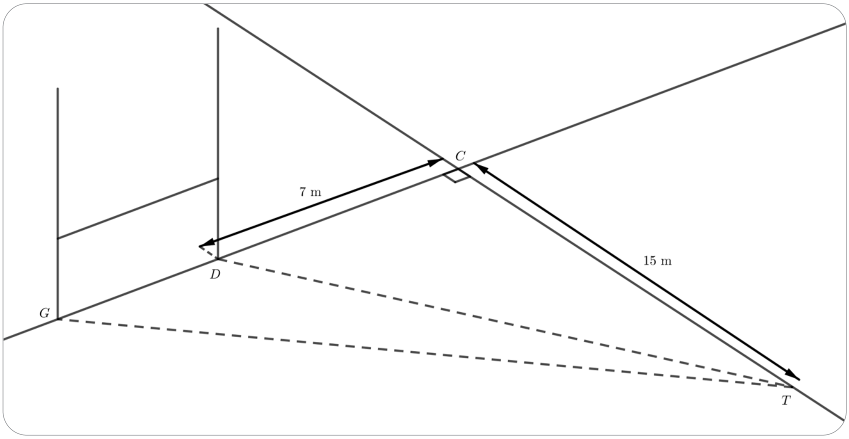
On donne $CD = 7$ mètres et $CT = 15$ mètres.

1. Pourquoi a-t-on $\overrightarrow{TC}.\overrightarrow{CD} = 0$?

2. Démontrer que $\overrightarrow{TG}.\overrightarrow{TD} = 313{,}2$.

3. Calculer les longueurs TG et TD. (Donner les valeurs exactes).

4. Déterminer une valeur approchée, au dixième de degré près, de l'angle de tir, c'est-à-dire de l'angle $\widehat{GTD}$.


C
7 m
15 m
D
G
T

Avant de commencer

Aide

➢ **Pour l'exercice 1** p. 17

Il y a un peu de calcul algébrique avec un mélange de propriétés de l'exponentielle. Le correcteur s'attend à des erreurs de la part des élèves. Une fois le sujet fait, prenez du temps pour lire les commentaires après la correction qui vous apporteront des méthodes pour contourner les difficultés (si cela est votre cas). Ces méthodes seront générales et applicables dans les autres sujets.

Les autres exercices sont assez classiques.

➢ **Pour l'exercice 2** p. 18

On prendra garde à la construction de l'arbre. Dans l'énoncé, nous ne connaissons pas une donnée de l'arbre pondéré mais cela ne doit pas poser problème (même si ça peut surprendre). Il faut faire attention à prendre soin de bien traduire l'énoncé. On n'oubliera pas de faire des phrases pour répondre aux questions quand cela est nécessaire !

➢ **Pour l'exercice 3** p. 18

Le début est de l'application du cours sur les suites géométriques. Il y a l'algorithme qui peut poser problème mais avec le contexte de l'exercice, on identifie facilement les variables en jeu pour savoir ce qu'il faut remplir (sans oublier ce que doit faire cet algorithme pour remplir la condition Tant que).

La partie B met en situation ce que vous avez fait avant.

➢ **Pour l'exercice 4** p. 19

Il y a une question ouverte où il faut (donc) chercher un peu (en faisant attention à la gestion du temps). Elle ne doit pas vous bloquer sur la continuité du sujet car la réponse est donnée et vous permet de poursuivre. Vous prendrez garde à avoir mis votre calculatrice en mode degré et non en radian.

Formules à connaître

■ **L'équation cartésienne d'une droite dont on connaît un vecteur normal**

Dans un repère orthonormé, si $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal d'une droite D alors

D admet une équation cartésienne de la forme : $ax + by + c = 0$ où c peut être déterminé avec les coordonnées d'un point de D.

- **L'équation cartésienne d'un cercle**

Dans un repère orthonormé, le cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon R a pour équation :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

- **La formule des probabilités totales**

Soit A et $\overline{A}$ deux évènements formant une partition de l'univers alors on a :

$$p(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B).$$

- **Une condition pour avoir deux évènements indépendants**

Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $p(A\cap B)=p(A)p(B)$ si et seulement si $p_A(B)=p(B)$ si et seulement si $p_B(A)=p(A)$.

- **La somme des *n* premiers termes consécutifs d'une suite géométrique**

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q\neq 1$ et de premier terme u_0 alors la somme des n premiers termes vaut :

$$S=u_0+\ldots+u_{n-1}=u_0\times\frac{1-q^n}{1-q}.$$

- **Quelques formules sur le produit scalaire**

Soit trois points A, B et C distincts deux à deux. Alors :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$;
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens ;
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de sens contraire.

Corrigé

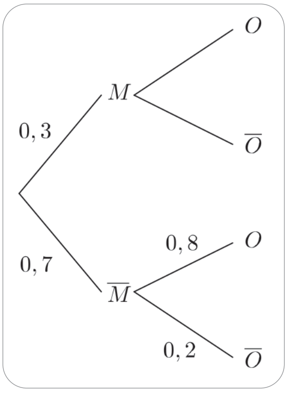
Exercice 1

- Question 1 : réponse a.
- Question 2 : réponse c.
- Question 3 : réponse c.
- Question 4 : réponse d.
- Question 5 : réponse a.

Exercice 2

1. On a : $p(M)=\dfrac{30}{100}=0{,}3$; $p(M\cap O)=\dfrac{9}{100}=0{,}09$ et $p_{\overline{M}}(O)=\dfrac{80}{100}=0{,}8$.

2. On a : $p(\overline{M})=1-p(M)=1-0{,}3=0{,}7$ et $p_{\overline{M}}(\overline{O})=1-p_{\overline{M}}(O)=1-0{,}8=0{,}2$.



3. On veut : $p(\overline{M}\cap\overline{O})$.
On a : $p(\overline{M}\cap\overline{O})=p(\overline{M})\times p_{\overline{M}}(\overline{O})=0{,}7\times 0{,}2=0{,}14$.
Ainsi la probabilité que la cliente ne souhaite aucune prestation supplémentaire est de 0,14.

4. M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. Donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :
$p(O)=p(M\cap O)+p(\overline{M}\cap O)=0{,}09+p(\overline{M})\times p_{\overline{M}}(O)=0{,}09+0{,}7\times 0{,}8$
Donc $p(O)=0{,}65$.

5. On a $p(M \cap O) = 0{,}09$ et $p(M) \times p(O) = 0{,}3 \times 0{,}65 = 0{,}195$
On constate que $p(M \cap O) \neq p(M) \times p(O)$. Donc les évènements M et O ne sont pas indépendants.

Exercice 3

Partie A

1. Le cours donne : $u_n = u_0 \times 2^n = 0{,}3 \times 2^n$.
Donc $u_{14} = 0{,}3 \times 2^{14} = 4915{,}2$ et $u_{20} = 0{,}3 \times 2^{20} = 314572{,}8$.

2. On veut $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{14}$.
On a : $S = u_0 \times \dfrac{1-2^{15}}{1-2} = 0{,}3 \times \left(2^{15} - 1\right) = 9830{,}1$.

3. On a :
Tant que $S < 10000$
    $U \leftarrow 2 \times U$
    $S \leftarrow S + U$
    $N \leftarrow N + 1$

Partie B

1. On remarque que la suite (u_n) modélise la situation car l'argent reçu à sa naissance (l'année 0) est de 30 centimes, soit de 0,3 € et que le montant double chaque année.
On sait que la somme totale est (d'après la partie A) : $S = 9830{,}1$.
Donc cette somme ne lui permet pas de payer un scooter à 10 000 €.

2. Il manque 169,9 € car $10000 - 9830{,}1 = 169{,}9$.

Exercice 4

1. *TCG* est un triangle rectangle en *C* et de plus, *G*, *D* et *C* sont alignés donc *TCD* est un triangle rectangle en *C*.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{TC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, ainsi $\overrightarrow{TC}.\overrightarrow{CD} = 0$.

2. $\overrightarrow{TG}.\overrightarrow{TD} = \left(\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CG}\right).\left(\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{TC}.\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TC}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CD}$
Donc $\overrightarrow{TG}.\overrightarrow{TD} = TC^2 + 0 + 0 + CG \times CD = 15^2 + 12{,}6 \times 7 = 313{,}2$