THÈME 1
Équations cartésiennes, systèmes linéaires

Niveau : à partir du début de la première

Le but de ce thème est de revenir sur des points techniques importants qu'un élève de première est *censé* maîtriser puisqu'il les a travaillés régulièrement depuis la 3^{e}. L'expérience montre qu'il est souvent nécessaire de mettre de l'ordre dans ces techniques.

Ce thème propose donc un travail sur les différentes méthodes, qui ont été abordées dans les années précédentes, ainsi qu'un approfondissement de la méthode par combinaison linéaire que l'on généralise avec **la méthode de Cramer** dans le cadre de système de deux équations à deux inconnues. **La méthode du pivot** de Gauss est proposée pour résoudre des systèmes plus gros. Ces deux méthodes sont celles qui demandent le moins de calculs et donc de temps.

Ce thème technique peut être rébarbatif. Je vous conseille de ne pas le travailler d'un coup, mais, d'y faire des allers et retours au fur et à mesure des besoins et envies.

On rappelle que deux systèmes sont équivalents s'ils ont exactement les mêmes solutions.

1. Retour sur les méthodes générales - Problème de synthèse

Rappel : **On considère le plan muni d'un repère** $(O, \vec{i}, \vec{j})$**. L'ensemble des points** $M(x, y)$ **tels que :**

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

est une droite de vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$**.**

Si A **et** B **sont deux points d'une droite, alors le vecteur** $\overrightarrow{AB}$ **la dirige.**

1. On considère les droites D, d, Δ et δ dont les équations suivent :

$$D : 2x + 3y - 4 = 0 \qquad d : x + y + 5 = 0$$

$$\Delta : x - y + 3 = 0 \qquad \delta : 3x - 4y + 3 = 0.$$

   Déterminer les coordonnées de deux points de chaque droite.
2. En déduire un vecteur directeur de chaque droite.
3. Vérifier que ce vecteur est bien colinéaire au vecteur trouvé grâce au rappel de cours.
4. Tracer ces 4 droites sur la calculatrice et déterminer les coordonnées des points d'intersections éventuels.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Δ et D, puis de Δ et δ en résolvant le système adapté par **substitution.**
   (***On exprime une variable en fonction de l'autre dans la première équation et on remplace dans la seconde. Après avoir résolu la seconde équation, on injecte la solution dans la première. On conclut.***)
6. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d et Δ en résolvant le système adapté par **addition/soustraction.**
   (***On ajoute les deux lignes pour obtenir une nouvelle équation ne dépendant que de*** x***. On soustrait les deux lignes pour obtenir une nouvelle équation ne dépendant que de*** y***. On résout séparément les deux nouvelles équations. On conclut.***)
   Remarque : **Cette méthode est la plus rapide pour résoudre des systèmes du type :** $\begin{cases} x + y &= ... \\ x - y &= ... \end{cases}$

7. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d et D, puis de d et δ en résolvant le système adapté par **combinaison linéaire.**
   (***On résout un système du type*** $\left\{\begin{array}{ll} x+by & =c \\ a'x+b'y & =c' \end{array}\right.$ ***en retranchant à la*** 2^e ***équation le produit de la première par a'. On obtient une équation ne dépendant que de*** y ***que l'on résout. On injecte la solution dans la première. On conclut.***)
   Vous pourrez en cas de besoin ou d'envie vous entraîner à cette méthode en reprenant la question précédente avec Δ et D, puis Δ et δ et en vérifiant la cohérence avec les réponses des questions 4. et 5.

2. Une automatisation de la méthode par combinaison linéaire

2.1. Principe

On veut déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et δ en appliquant la méthode complète de combinaison linéaire. Pour cela, on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-4=0 \\ 3x-4y+3=0 \end{array}\right.$$

en procédant comme suit :

1. On note L_1 la première ligne et L_2 la deuxième.
2. Multiplier L_1 par 3 et L_2 par 2.
3. Soustraire les deux lignes pour obtenir une équation qui ne dépend que de y. Garder une des deux équations précédentes pour compléter le système.
4. Résoudre l'équation en y et injecter la solution dans la deuxième équation.

> **Remarque :** **D'une façon générale, on résout le système** $\left\{\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right.$ **en multipliant** L_1 **par** a' **et** L_2 **par** a**.**

2.2. Exercices

Résoudre par cette méthode :

1. $\left\{\begin{array}{l} 4x+8y-1=0 \\ -3x+7y+8=0 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} 2x-y+3=0 \\ -x+3y+5=0 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} -5x+y=3 \\ 8x+3y=-5 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{l} (2+\sqrt{2})x+2y=7 \\ (2-\sqrt{2})x-y=3 \end{array}\right.$

Si vous avez fait le chapitre sur l'exponentielle, il est intéressant de chercher celui-ci :

$$5. \left\{ \begin{array}{l} e^2x + ey = 7 \\ e^3x - y = 3 \end{array} \right.$$

Courage ! Tenez bon sur les calculs.

3. Approfondissement : Méthode de Cramer

3.1. Principe

La résolution par la méthode de Cramer est une automatisation de la méthode précédente. Elle repose sur les calculs formels ci-dessous dans le cadre d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Il est intéressant de se familiariser avec ce type de calcul et de faire le parallèle avec ce qui a été fait précédemment avec des nombres.
Soient $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ tels que $ab' - ab' \neq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a'(ax + by) = a'c \\ a(a'x + b'y) = ac' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a'ax + a'by = a'c \\ aa'x + ab'y = ac' \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a'ax + a'by - (aa'x + ab'y) = a'c - ac' \\ aa'x + ab'y = ac' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a'b - ab')y = a'c - ac' \\ aa'x + ab'y = ac' \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \\ aa'x + ab'y = ac' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \\ aa'x + ab'\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = ac' \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \\ aa'x = ac' - \frac{a^2b'c' - aa'b'c}{ab' - a'b} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \\ aa'x = \dfrac{a^2b'c' - aa'bc' - a^2b'c' + aa'b'c}{ab' - a'b} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \\ aa'x = \dfrac{aa'b'c - aa'bc'}{ab' - a'b} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \\ x = \dfrac{aa'(b'c - bc')}{aa'(ab' - a'b)} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \\ x = \dfrac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \end{array} \right.$$

$$S = \left\{ \left(\frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}; \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \right) \right\}$$

Remarque : Si $ab' - ab' = 0$, le système a soit une infinité de solutions soit aucune solution.

En effet, les droites d'équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont dirigées par les vecteurs $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$. Le déterminant de ces vecteurs est :

$$det\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}\right) = -ba' - a \times (-b') = ab' - a'b.$$

Ainsi, la quantité $ab' - a'b$ est nulle si et seulement les vecteurs directeurs des deux droites sont colinéaires c'est-à-dire si et seulement les droites sont parallèles (distinctes ou confondues). Le système est alors constitué :
– soit de deux équations de droites équivalentes et le système a une infinité de solutions ;
– soit de deux équations de droites strictement parallèles et le système n'a pas de solution du tout.
Ce déterminant est appelé **déterminant du système**.

Les formules donnant les solutions sont efficaces sans être ragoutantes, on peut les retenir de manière plus géométrique en les voyant comme des quotients de déterminants :

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right.$$

Le dénominateur est toujours le gamma de gauche, γ_1, c'est-à-dire le déterminant de $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ qui est le même que celui de $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$.
Pour trouver le numérateur du x, on raye mentalement la colonne des x, et on calcule le déterminant à l'aide uniquement des coefficients, des nombres, sans les variables et on en prend l'opposé du résultat(on met un – devant). Ce déterminant est matérialisé par le gamma central, γ_2.
Pour trouver le numérateur du y, on raye mentalement la colonne des y, et on calcule le déterminant à l'aide uniquement des coefficients, des nombres, sans les variables. Ce déterminant est matérialisé par le gamma de droite, γ_3.

On a ainsi : $\boxed{x = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \text{ et } y = \frac{\gamma_3}{\gamma_1}}$.

<u>Mise en garde :</u> Ces formules n'étant pas au programme, elles ne sont pas à appliquer telles quelles sur un devoir écrit rédigé (en classe) mais permettent

de répondre rapidement à un QCM, de vérifier ses calculs, ou de répondre à une question de concours.

3.2. Exercices

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 3x + 6y = -5 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ 3x + 6y = 6 \end{cases}$

Avec des calculs plus complexes : 5. $\begin{cases} x - \sqrt{3}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{3}x + y = 1 \end{cases}$

Cette méthode de résolution est la méthode la plus rapide pour résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues.
Elle se généralise à des systèmes plus gros mais la méthode suivante est alors plus rapide.

4. Approfondissement : Pivot de Gauss

4.1. Principe

La méthode du pivot de Gauss est la méthode la plus rapide pour résoudre des systèmes linéaires qui ont au moins trois équations et trois inconnues. Pour le moment, vous n'avez rencontré de tels systèmes que dans l'étude de cas concret, par exemple :

Marie est fleuriste. Elle voudrait valoriser 43 fleurs pour un montant de 88 euros. Elle dispose de 5 gerbéras, 20 roses et 18 tulipes.
Elle propose deux types de bouquets ainsi que les fleurs à l'unité sans modifier le prix unitaire de chaque fleur.
Le bouquet « envie » est vendu 10 euros et est composé d'une gerbéra, 2 roses et 2 tulipes. Le bouquet « coup de cœur » est vendu 17 euros et est composé d'une gerbera, 4 roses et 3 tulipes. Elle composera ces bouquets à la demande. Combien Marie vend-elle ses fleurs à l'unité ?

En notant :
g, le prix d'une gerbéra
r, le prix d'une rose
t, le prix d'une tulipe.

On doit résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{r} g+2r+2t=10 \\ g+4r+3t=17 \\ 5g+20r+18t=88 \end{array}\right.$$

La méthode du pivot de Gauss consiste à rendre ce système « triangulaire » en supprimant par une opération double la variable x des 2^e^ et 3^e^ équations, puis en éliminant la variable y de la troisième équation. C'est la phase de descente.

On peut alors déterminer la valeur de z qu'on réinjecte dans la deuxième équation pour trouver y. On injecte ensuite y et z dans la première équation pour trouver x. C'est la phase de remontée.

On conclut.

Pour cela, on retranche la ligne 1 à la ligne 2 puis on retranche 5 fois la ligne 1 à la ligne 3 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g+2r+2t &=& 10 \\ g+4r+3t-(g+2r+2t) &=& 17-10 \\ 5g+20r+18t-5(g+2r+2t) &=& 88-50 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} g+2r+2t &=& 10 \\ 2r+t &=& 7 \\ 10r+8t &=& 38 \end{array}\right.$$

On retranche alors 5 fois la ligne 2 à la ligne 3 pour isoler t et le déterminer :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g+2r+2t &=& 10 \\ 2r+t &=& 7 \\ 10r+8t-5(2r+t) &=& 38-35 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} g+2r+2t &=& 10 \\ 2r+t &=& 7 \\ 3t &=& 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} g+2r+2t &=& 10 \\ 2r+t &=& 7 \\ t &=& 1 \end{array}\right.$$

On a ainsi un système triangulaire supérieur facile à résoudre.

À ce stade pour plus d'agilité dans les calculs on peut inverser l'ordre des lignes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} t &=& 1 \\ 2r+1 &=& 7 \\ g+2r+2 &=& 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 1 \\ r &=& 3 \\ g+2\times 3+2 &=& 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 1 \\ r &=& 3 \\ g &=& 10-2-6 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 1 \\ r &=& 3 \\ g &=& 2 \end{array}\right.$$

Chaque tulipe coûte donc 1 euro, chaque rose 3 euros et chaque gerbéra 2 euros.

Pour plus de lisibilité, on notera L_1 la ligne 1, L_2 la ligne 2...

Un autre cas concret avec des coefficients plus compliqués :
À la boutique de bonbons, Laurie achète 2 bananes, 3 langues et une sucette pour 2,50 euros.
Gwenael achète 3 bananes, 2 langues et 2 sucettes pour 3,35 euros.
Marc achète 5 bananes, 4 langues et 3 sucettes pour 5,45 euros.
Combien coûte chaque sorte de bonbon ?

En notant :
b, le prix d'une banane
l, le prix d'une langue
s, le prix d'une sucette.

On doit résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2b+3l+s & = & 2,50 \\ 3b+2l+2s & = & 3,35 \\ 5b+4l+3s & = & 5,45 \end{array}\right.$$

Pour appliquer la méthode de Gauss, on va devoir retrancher à la 2$^{\text{e}}$ ligne $\frac{3}{2}$ fois la ligne 1. On remplace donc L_2 par $L_2 - \frac{3}{2} \times L_1$
On devra ensuite remplacer la ligne 3 par $L_3 - \frac{5}{2} \times L_1$.
C'est ce coefficient 2 qui donne son nom à la méthode, ce 2 est le pivot de l'étape.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2b+3l+s & = & 2,5 \\ \dfrac{-5}{2}l+\dfrac{1}{2}s & = & -0,4 \\ \dfrac{-7}{2}l+\dfrac{1}{2}s & = & -0,8 \end{array}\right.$$

En appliquant la méthode de manière brute comme un ordinateur, on voit vite que l'on va avoir de plus en plus de fractions et une complexité de calcul inutile. Comme nous ne sommes pas des ordinateurs, on peut à ce stade multiplier les deux dernières lignes par 2 pour supprimer les fractions et alléger les calculs.

La méthode automatique peut facilement se programmer même si dans certains exemples, l'algorithme peut planter dans le cas d'apparition d'un pivot nul.