1 Modes de raisonnement

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit P et Q deux propositions mathématiques.

1. P implique Q est équivalent à non(P) implique non(Q). ☐ Vrai ☐ Faux
2. P implique Q est équivalent à non(Q) implique non(P). ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. Soit $n \geq 0$. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par contraposée, que si n^2 est un entier pair alors n aussi.
2. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. On commencera par écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls tels que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible (c'est-à-dire non simplifiable).

Exercice 3 –

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $2^n > n$.

Exercice 4 –

On pose $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$$

Montrer par récurrence double que :

$$\forall n \geq 0,\ \frac{a_n}{n!} \leq 1$$

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $u_2 = 1$ et :

$$\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur à 2, on a $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 6 –
Soit u la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 6$ et :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = (-3n+5)\,3^n$$

Exercice 7 –
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ x^2 \leq \varepsilon \implies x = 0$$

Pour aller plus loin

Exercice 8 –
Soit $b > 0$. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = bu_n^2$$

Exercice 9 – Le vrai/faux de la fin

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est le carré d'un entier, $2n$ ne l'est pas. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Tout entier positif est somme de trois carrés d'entiers naturels. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. P implique Q est équivalent à non(P) implique non(Q). ☐ Vrai ☒ Faux
2. P implique Q est équivalent à non(Q) implique non(P). ☒ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

1. On souhaite montrer que si n^2 est pair, alors n aussi. Supposons donc que n n'est pas pair et montrons que n^2 n'est pas pair. L'entier n est donc impair : il existe un entier $k \geq 0$ tel que $n = 2k+1$. Alors :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

et $2k^2+2k$ est un entier donc n^2 est impair. On a ainsi montré le résultat souhaité par contraposée.

Méthode

Soit P et Q deux propositions mathématiques. Montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie est équivalent à montrer que l'implication $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ est vraie. Autrement dit, pour montrer $P \Rightarrow Q$, on peut supposer que Q est fausse et montrer que P est fausse.

2. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Sachant que ce nombre est strictement positif, il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

et sans perte de généralité, on peut supposer que cette fraction est irréductible. On a alors $q\sqrt{2} = p$ donc $2q^2 = p^2$. On en déduit que p^2 est un entier pair donc p aussi d'après la question 1. Ainsi, il existe un entier naturel k tel que $p = 2k$. Alors :

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

ce qui implique que $q^2 = 2k^2$. Ainsi, q^2 est pair donc q aussi d'après la question 1. On en déduit que p et q sont tous les deux divisibles par 2 ce qui est absurde car $\frac{p}{q}$ est irréductible. On vient donc de montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Cours

L'ensemble des rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

Un réel est irrationel si il n'est pas rationnel.

Méthode

Soit P une proposition mathématique. Pour montrer que P est vraie, on peut supposer que P est fausse et obtenir une absurdité.

Exercice 3 –

On a $2^1 = 2 > 1$ donc l'inégalité souhaitée est vraie au rang 1.

Soit $n \geq 1$ tel que $2^n > n$. Montrons que $2^{n+1} > n + 1$. On a :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n$$

par hypothèse de récurrence. Or $n \geq 1$ donc $2n = n + n \geq n + 1$. On en déduit que :

$$2^{n+1} > 2n \geq n + 1$$

ce qui montre le résultat souhaité.

La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1.

Méthode

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour démontrer par récurrence une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq n_0$, on suit le raisonnement suivant :

— *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie au rang n_0.

— On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq n_0$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montre alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

— On conclut.

Exercice 4 –

On a :

$$\frac{a_0}{0!} = 1 \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_1}{1!} = 1 \leq 1$$

L'inégalité à montrer est donc vraie aux rangs 0 et 1.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{a_n}{n!} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \leq 1$$

Montrons que :

$$a_{n+2} \leq (n+2)!$$

On a par hypothèse de récurrence et sachant que les termes sont positifs :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + (n+1)a_n \\ &\leq (n+1)! + (n+1)n! \\ &\leq 2(n+1)! \\ &\leq (n+2)(n+1)! \\ &\leq (n+2)! \end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait prouver.

Par récurrence double, on vient donc de montrer l'inégalité souhaitée :

$$\forall n \geq 0, \ \frac{a_n}{n!} \leq 1$$

Méthode

Pour démontrer par récurrence double une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geq 0$, on suit le raisonnement suivant :

— *Initialisation* : on montre que la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

— On prouve l'*hérédité* : on considère un entier $n \geq 0$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies et montre alors que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

— On conclut.

Ce type de raisonnement est particulièrement adapté dans le cas de certaines suites dont un terme dépend des deux précédents. On adapte évidemment le raisonnement si la propriété est définie à partir d'un autre rang que 0.

Exercice 5 –

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$. Ainsi la propriété est vérifiée au rang 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à deux tel que :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Montrons que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

On sait que :

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Par hypothèse de récurrence on sait que $0 \leq u_n \leq 1$. Il est clair que :

$$1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$$

et on a :

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \geq 0$$

car $n \geq 2$. Ainsi, u_n et $1 - \frac{1}{n^2}$ sont deux nombres compris entre 0 et 1. Par produit, u_{n+1} appartient donc lui aussi à $[0, 1]$.

La propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2.

Exercice 6 –

On a :

$$(-3 \times 0 + 5)\, 3^0 = 5 = u_0 \quad \text{et} \quad (-3 \times 1 + 5)\, 3^1 = 2 \times 3 = 6 = u_1$$

L'égalité souhaitée est donc vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$u_n = (-3n + 5)\, 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = (-3(n+1) + 5)\, 3^{n+1} = (-3n + 2)\, 3^{n+1}$$

Montrons que :

$$u_{n+2} = (-3(n+2) + 5)\, 3^{n+2} = (-3n - 1)\, 3^{n+2}$$

Par définition de u, on sait que :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 6\,(-3n + 2)\, 3^{n+1} - 9\,(-3n + 5)\, 3^n \\ &= 2\,(-3n + 2)\, 3^{n+2} - (-3n + 5)\, 3^{n+2} \\ &= (-6n + 4 + 3n - 5)\, 3^{n+2} \\ &= (-3n - 1)\, 3^{n+2} \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait montrer.

Par récurrence double, on vient donc de montrer que la propriété de l'énoncé est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 7 –

Raisonnons par contraposée. Soit x un réel non nul.

Montrons l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x^2 > \varepsilon$.

> $\text{Non}(\forall \varepsilon > 0,\ x^2 \leq \varepsilon) = (\exists \varepsilon > 0 \mid x^2 > \varepsilon)$

Posons :

$$\varepsilon = \frac{x^2}{2}$$

Sachant que x est non nul, il est clair que $\varepsilon \in \left]0, x^2\right[$ ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 8 –

On a :

> Il est toujours utile de calculer les premiers termes d'une suite définie par récurrence. Cela permet de conjecturer le signe, les variations, l'expression du terme général...

$$u_1 = bu_0^2$$

puis :

$$u_2 = bu_1^2 = b(bu_0^2)^2 = b^3 u_0^4$$

et :

$$u_3 = bu_2^2 = b^7 u_0^8$$

On conjecture alors :

> Attention : $u_0^{2^n}$ n'est pas $(u_0^2)^n$

$$\forall n \geq 0,\ u_n = b^{2^n-1} u_0^{2^n}$$

On montre cette égalité par récurrence. Elle est vraie au rang 0 car :

$$b^{2^0-1} u_0^{2^0} = b^0 u_0^1 = u_0$$

Soit $n \geq 0$ tel que :

$$u_n = b^{2^n-1} u_0^{2^n}$$

Montrons que :

$$u_{n+1} = b^{2^{n+1}-1} u_0^{2^{n+1}}$$

Par définition de la suite, on a :

$$u_{n+1} = bu_n^2$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= b\left(b^{2^n-1} u_0^{2^n}\right)^2 \\ &= bb^{2(2^n-1)} u_0^{2\times 2^n} \\ &= b^{1+2^{n+1}-2} u_0^{2^{n+1}} \\ &= b^{2^{n+1}-1} u_0^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait montrer.

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc par principe de récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = b^{2^n-1} u_0^{2^n}$$

Exercice 9 –

1. Vrai. Soit $n \geq 1$ s'écrivant comme le carré d'un entier : $n = k^2$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde que $2n$ est aussi le carré d'un entier : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2n = p^2$. On en déduit que $p^2 = 2k^2$ donc par stricte positivité de p et k :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{k}$$

ce qui implique que $\sqrt{2}$ est rationnel ce qui est absurde. Ainsi, $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

2. Faux. Il suffit de trouver un contre-exemple. En étudiant les premières valeurs de n, on remarque que la propriété est fausse pour $n = 7$. En effet, si il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$7 = a^2 + b^2 + c^2$$

alors a, b et c appartiennent nécessairement à $\{0, 1, 2\}$ (sinon, la somme est supérieure ou égale à 9). On vérifie alors facilement qu'aucun triplet n'est solution.

Méthode

Pour montrer qu'une propriété dépendant d'un entier $n \geq 0$ est fausse, il suffit de donner un contre-exemple concret.

2 Ensembles et applications

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$	☐ Vrai	☐ Faux
2. $A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ x \in B$	☐ Vrai	☐ Faux
3. $A \subset B \Longleftrightarrow \exists x \in A,\ x \in B$	☐ Vrai	☐ Faux
4. $A \cup \emptyset = A$	☐ Vrai	☐ Faux
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 –

Donner l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 3 –

On considère les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $A = [0, 2]$, $B = [1, 2]$, $C = [1, 3]$. Donner explicitement les ensembles suivants :

— $A \cup B$.

— $A \cup C$.

— $A \cap C$.

— $\overline{A} \cap C$.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{et} \quad g(x) = -x$$

1. $f \circ g$ est-elle une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Si oui, donner son expression.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f \circ g(x) = x$.

Exercice 5 –

Soit A, B et C trois parties d'un même ensemble telles que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$. Montrer que $A = B$.