Chapitre 1

Introduction et notions générales

1.1. Généralités

1.1.1. Pourquoi le codage de canal ?

Nous souhaitons transmettre un message (représenté en bits) à une destination par un canal fiable. Des erreurs peuvent se produire lors de la transmission et nous espérons détecter et corriger ces erreurs de transmission. Pour ce faire, nous devons introduire une certaine redondance dans notre message transmis. Le principe des procédures de correction des erreurs consiste à ajouter une redondance aux informations à transmettre selon des règles bien définies.

Des erreurs de transmission surviennent dans chaque système de transmission de messages. La probabilité P_e d'une telle erreur de symbole peut être maintenue très faible, par exemple par une très grande énergie de signal. Cependant, la probabilité d'erreur de symbole $P_e = 0$ ne peut jamais être atteinte en raison de la fonction de densité de probabilité gaussienne du bruit thermique qui est toujours présente.

C'est pourquoi il est essentiel d'assurer une protection particulière des données à transmettre, adaptée à l'application et au canal, en particulier dans le cas des canaux fortement perturbés ainsi que pour les applications critiques pour la sécurité. Pour ce faire, on ajoute de la redondance à l'émetteur et on utilise cette redondance au récepteur pour réduire le nombre d'erreurs de décodage.

Le codage de canal est, en général, une affectation unique des caractères émis par la source aux caractères transmis par le canal. Cette assignation devrait être aussi efficace que possible et, compte tenu des perturbations sur le canal, être aussi fiable que possible.

Pour résoudre ce problème, il s'est avéré utile de faire la distinction entre codage de sources et codage de canal. Le codage de sources est destiné à fournir une représentation des caractères sous une forme adaptée à la transmission ou au traitement avec le moins de redondance possible. Le codage de canal a pour tâche d'ajouter de la redondance aux caractères à transmettre afin de détecter et de corriger les caractères falsifiés par des perturbations de canal.

1.1.2. Quelques applications du codage de canal

Les codes de détection et de correction d'erreurs ne sont pas seulement utilisés dans des applications scientifiques telles que les missions spatiales Viking (Mars), Voyager (Jupiter, Saturne), Galileo (Jupiter), Cassini (Jupiter, Saturne, …), mais également dans les systèmes de la vie quotidienne. Presque tous les supports de stockage numériques tels que le CD (Compact Disc), le DVD (Digital Versatile Disc), la Dat-Tape ou le disque dur d'un PC protègent leurs données par des procédures de codage extrêmement efficaces.

Non seulement le stockage des données numériques, mais aussi le transfert de fichiers lui-même doit être protégé contre les erreurs. Les systèmes de communications mobiles basés sur la norme GSM (Global System for Mobile Communications), la 4G (quatrième Génération) et la 5G (cinquième Génération). En particulier, la transmission de données pures exige une qualité de transmission élevée (taux d'erreur très faible), qui ne peut être obtenue sans codage de canal. Ceci s'applique également, par exemple, aux connexions par modem via des lignes téléphoniques pour des applications telles que l'internet, le système web et d'autres services. Bien entendu, les nouveaux médias, tels que la radiodiffusion numérique (DAB : Digital Audio Broadcasting) et la télévision numérique (DVB : Digital Video Broadcasting), utilisent également des procédures de traitement des erreurs.

La conception de procédures de codage efficaces doit être toujours orientée vers les conditions marginales spécifiques du système de transmission et en particulier vers les caractéristiques du canal de transmission. Les applications spéciales nécessitent donc des codes spéciaux. Les conditions marginales les plus importantes à prendre en compte lors de la sélection et de l'optimisation d'un système de transmission avec codage de canal comprennent, entre autres, les propriétés du canal de transmission, en particulier la largeur de bande disponible, la puissance de transmission disponible et la méthode de modulation spécifiée.

1.2. Théorie du codage de Shannon

1.2.1. Le taux de codage

Un mot de code $\boldsymbol{c}$ d'un code $\boldsymbol{C}$ se compose d'un nombre de n éléments $\{c_i\}$ d'un corps de nombre déterminé. Ces n éléments sont constitués d'un certain nombre de k éléments d'information et d'un certain nombre d'éléments de contrôle r, de sorte que $n = k + r$.

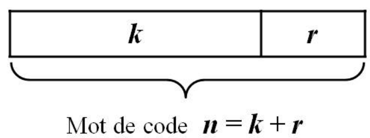

Fig. 1.1 Structure symétrique d'un mot de code

Pour envoyer M messages différents, k symboles (bits) sont nécessaires tels que : $M = q^k$, c'est-à-dire $k = \log_q M$ (pour le cas binaire $q = 2$, et $M = 2^k$). Par contre, on enverra peut-être plus de bits à travers le canal pour améliorer la robustesse du message (voir plus loin). Ainsi, si on envoie n bits pour en transmettre k, on aura un taux de codage (taux de transmission) donné par :

$$\boldsymbol{R_C} = \frac{\log_q \boldsymbol{M}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}} < \mathbf{1} \ \left[\text{bit/usage du canal}\right] \qquad 1.1$$

R_C est une mesure pour l'évaluation du codage, il indique le rapport entre la longueur k de séquence non codée et la longueur n de séquence codée et prend la valeur un pour le cas non codé ($k = n$). Le taux de codage est également une mesure permettant d'augmenter la largeur de la bande du signal nécessaire, car un plus grand nombre de symboles ($n > k$) doit être transmis en même temps après le codage.

Shannon a pu montrer dans ses travaux de 1948 que chaque canal de transmission est décrit par une quantité quantitative appelée capacité du canal [1][2], de sorte qu'un taux d'erreur arbitrairement faible peut être atteint par le codage de canal, à condition que le débit de données à transmettre soit inférieur à la capacité du canal et qu'un traitement suffisamment complexe en émetteur et récepteur est possible.

Les caractéristiques du canal ne limitent pas la qualité de la transmission, mais seulement le débit. Autrement dit, le taux R_C est atteignable s'il existe une suite de codes (M,n) avec $M = M(n) = 2^{\boldsymbol{nRc}}$, où la probabilité d'erreur moyenne s'annule lorsque n tend vers l'infini.

Cependant**,** dans la théorie de Shannon, l'existence de codes aussi puissants n'est prouvée que théoriquement. Dans les années qui ont suivi 1948, il n'a pas été possible de trouver les codes théoriquement prévus dans la pratique. Toutefois les procédures correspondantes n'étaient pas encore techniquement réalisables à l'époque.

1.2.2. Capacité de canal : Théorème du codage de canal

Pour chaque canal de capacité $C > 0$, il y a toujours (au moins) un code dont la probabilité d'erreur est proche de zéro, tant que le taux de codage R_C est inférieur à la capacité C [bit/symbole] du canal. La condition préalable est que la longueur du bloc de ce code soit très grande **:** $n \rightarrow \infty$.

- **Remarques**
  - La formulation « la probabilité d'erreur est proche de zéro » n'est pas identique à la formulation « la transmission est sans erreur ». Exemple : Dans une séquence infiniment longue, de nombreux symboles sont falsifiés.
  - Pour certains canaux, la probabilité d'erreur reste proche de zéro même avec $R_C = C$ (mais pas pour tous les canaux).
  - L'inverse du théorème de codage de canal est également vrai, énonçant : Si le taux de codage R_C est supérieur à la capacité du canal C, une probabilité d'erreur arbitrairement faible ne peut en aucun cas être atteinte.

Pour le cas simple d'un canal AWGN (Additive White Gaussian Noise : bruit additif blanc gaussien) avec une densité spectrale de puissance constante de $\boldsymbol{N_0}$, la capacité du canal peut être facilement calculée [3][4]. Le résultat final est le suivant :

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{2}\,\mathrm{lb}\left(1 + 2\frac{\boldsymbol{E_S}}{\boldsymbol{N}_0}\right) \quad [\text{bit/usage de canal}] \qquad 1.2$$

où E_S est l'énergie émise par symbole, N_0 la densité de puissance de bruit et $\mathrm{lb} = \log_2$ le logarithme binaire.

La relation suivante donne la capacité du canal par unité de temps

$$\boldsymbol{C_t} = \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{\Delta T}} = \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{lb}\left(1 + 2\frac{\boldsymbol{E_S}}{\boldsymbol{N}_0}\right) \quad [\text{bit/s}] \qquad 1.3$$

Exemple 1.1

$E_S/N_0 = 7,5 \Rightarrow C = \mathrm{lb}(1+2E_S/N_0) = 1/2 \cdot \mathrm{lb}(16) \Rightarrow C = 2$ bit/symbole. Pour un canal avec la largeur de bande (physique) B = 4 kHz, qui correspond à la fréquence d'échantillonnage f_e = 8 kHz, on a : C_t = 16 kbit/s.

■

Comme déjà mentionné ci-dessus, le codeur ajoute de la redondance au flux de données, c'est-à-dire que le vecteur codé contient plus d'éléments que le vecteur d'information ($n > k$). Puisque l'énergie n'est pas augmentée, chaque bit codé a inévitablement moins d'énergie qu'un bit d'information. Lors de l'évaluation et de la comparaison des systèmes, il est donc souvent intéressant de ne pas considérer l'énergie E_S par symbole de canal, mais l'énergie E_b appliquée pour chaque bit d'information. Les deux valeurs sont reliées par le taux de codage R_C, donc les conditions suivantes s'appliquent :

$$\boldsymbol{k \cdot E_b = n \cdot E_S \Rightarrow E_S = \frac{k}{n} \cdot E_b = R_C \cdot E_b} \qquad 1.4$$

La relation (1.4) peut être clairement interprétée de telle sorte que, en moyenne, exactement $1/R_C$ bits codés sont transmis par bit d'information, de sorte que l'énergie transmise par bit d'information augmente d'un facteur de $1/R_C$. Avec l'équation (1.4), l'expression de la capacité de canal prend la forme suivante :

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{lb}\left(1 + 2\boldsymbol{R_C}\frac{\boldsymbol{E_b}}{\boldsymbol{N_0}}\right) \qquad 1.5$$

En ce qui concerne l'efficacité de la bande passante, l'objectif de la transmission la plus efficace possible est atteint si le taux de codage R_C est égal à la capacité du canal C. La relation (1.5) peut ensuite être utilisée pour déterminer le rapport signal sur bruit (SNR : Signal to Noise Ratio), requis pour un taux de code spécifique pour le canal AWGN. La conversion de la relation (1.5) en E_b/N_0 donne la relation suivante **[3][4][5]** :

$$\frac{\boldsymbol{E_b}}{\boldsymbol{N_0}} = \frac{2^{2\boldsymbol{R_c}} - 1}{2^{2\boldsymbol{R_c}}} \qquad 1.6$$

La figure (Fig. 1.2) présente l'évaluation graphique de la relation (1.6). On peut voir un tracé à peu près linéaire. La valeur limite pour $R_C \rightarrow 0$ est intéressante, elle peut facilement être calculée à l'aide de la règle de L'Hospitale, ce qui donne :

$$\lim_{R_C \to 0} \frac{E_b}{N_0} = \lim_{R_C \to 0} \frac{2^{2R_C} - 1}{2R_C} = \ln(2)$$, ou l'équivalent en dB :

$$\lim_{\boldsymbol{R_C \to 0}} \mathbf{10} \cdot \log\left(\frac{\boldsymbol{E_b}}{\boldsymbol{N_0}}\right) = \mathbf{10}\log(\ln(\mathbf{2}) \approx \mathbf{-1{,}6} \text{ dB} \qquad 1.7$$

Ce rapport signal sur bruit représente la limite inférieure du canal AWGN, jusqu'à laquelle une transmission sans erreur est encore théoriquement possible. Pour des rapports signal/bruit (SNR) plus faibles, une transmission sans erreur ne peut pas être réalisée même avec le plus grand effort, car le taux de codage tend à être nul ($n \to \infty$) et la transmission de l'information est plus efficace. Le graphique résume le résultat, où l'ordonnée R_C est tracée sur une échelle linéaire et l'abscisse E_b / N_0 est tracée de façon logarithmique [3][5].

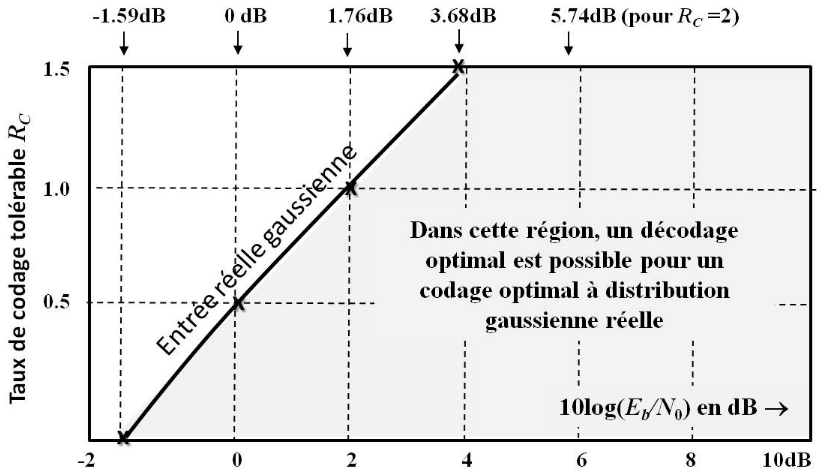

Fig. 1.2 : Capacité du canal (Canal AWGN)

Enfin, on considère le canal Gaussien continu limité à la bande B. A cette largeur de bande, selon le théorème d'échantillonnage [3][5] de Shannon, si la première condition de Nyquist [4][5][6] est remplie, un total de $2B{\cdot}\Delta T$ symboles peut être transmis dans une période de temps ΔT. Avec la puissance de bruit $N = B{\cdot}N_0$ et la puissance de signal $S = R_b{\cdot}E_b$

(R_b est le débit de données des bits d'information [4])[1], la capacité de canal peut être adaptée sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{C_t} = \frac{\boldsymbol{C}}{\Delta \boldsymbol{T}} = \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{lb}\left(1 + \frac{\boldsymbol{R_b}}{\boldsymbol{B}} \frac{\boldsymbol{E_b}}{\boldsymbol{N}_0}\right) \qquad 1.8$$

On voit que la capacité C_t dépend à la fois de la bande passante B et du rapport signal sur bruit E_b / N_0. Dans certaines limites, un échange de bande passante et de rapport signal sur bruit est possible. Dans le cas extrême $R_b /B= C_t /B$ ($R_b = C_t$), la valeur limite du rapport signal sur bruit E_b / N_0 de la relation (1.8) résulte de la valeur limite $R_b /B = C_t /B \rightarrow 0$.

1.2.3. Conclusion

Lorsque l'on conçoit une chaîne de communication numérique, il est naturel de se poser les questions suivantes :

1. Peut-on transmettre une information sans erreurs sur un canal bruité ?
2. Si oui, est ce que cela implique que *le rendement* du codeur de canal doit être nul ?
3. Si non, y a t'il un rendement optimal, pour un niveau de bruit donné ?

La réponse à ces questions, selon la théorie de Shannon, peut être donnée comme suit :

1. En théorie de l'information, le deuxième théorème de Shannon dit (Théorème de codage de canal) montre qu'il est possible de transmettre des données numériques sur un canal même bruité presque sans erreur à un débit maximum calculable [1].
2. Pour une source de débit d'information R_b bit/s et un canal de capacité C_t bit/s, si $R_b > C_t$ la probabilité d'avoir des bits erronés au décodage reste strictement positive.
3. Pour tout débit binaire $R_b < C_t$ donné, on peut trouver un code de rendement (taux) R_C et dont la probabilité d'erreur binaire est aussi proche de 0 que l'on veut. Le taux d'un code $R_C = k/n$ mesure la proportion de bits utiles transmis par utilisation du canal de transmission (où k est la taille du mot d'information avant le codage et n est la taille du mot de code après le codage).

[1]Le débit binaire R_b est aussi généralement indiqué dans la biographie de référence avec R ou $\dot{D}$.

On peut interpréter ce résultat de la manière suivante : si un canal de transmission génère des erreurs de transmission, il est tout de même possible de trouver une manière de coder les messages émis en leur rajoutant suffisamment de redondance de sorte qu'on puisse retrouver le message émis sans erreur. Ce théorème ne dit pas comment construire un tel code. Le problème des spécialistes des codes correcteurs d'erreurs est de trouver des méthodes de codage qui se rapprochent autant que possible de la borne de Shannon avec un rendement acceptable.

On peut affirmer qu'avec la diminution du rendement du code (taux de codage), les propriétés de protection contre les erreurs d'un code de canal peuvent être mieux observées et deviendront claires, par exemple, dans l'étude du code de Hamming (Chapitre 3) et des codes Reed-Solomon (Chapitre 5). Dans le même temps, cependant, avec un taux de code décroissant, l'effort pour les bits de contrôle supplémentaires ***r*** augmente en conséquence.

1.3. Chaîne de transmission générale

1.3.1. Définition

Dans un système de communication, on veut transmettre l'information provenant d'un émetteur vers un récepteur, à travers un canal de transmission (Fig.1.3). Ce dernier possède un certain nombre de caractéristiques, notamment sa capacité, sa nature physique, et le bruit qui falsifie l'information.

La figure (Fig. 1.4) illustre le principe de base d'une transmission numérique de messages avec codage de source et codage de canal. Comme on l'a déjà indiqué, la redondance est d'abord éliminée par le codage de source, puis ajoutée de manière contrôlée par le codage de canal. La redondance éventuellement présente dans les données sources est inutile pour le codage de canal, puisque les caractéristiques de cette redondance ne sont pas exactement contrôlables. Les données de base peuvent ne pas être redondantes du tout.

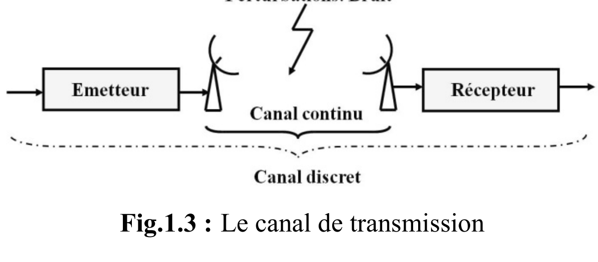

Fig.1.3 : Le canal de transmission