

Chapitre 1

Techniques de calcul - Trigonométrie

Les fondamentaux du cours

1 Développement - Factorisation

Proposition 1.1 (Identités remarquables).

Soient a, b et c des réels quelconques. On a :

- (i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- (ii) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- (iii) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$.

Remarque. En remplaçant b par $-b$, on déduit d'autres identités remarquables.

Proposition 1.2 (Factorisation).

Soient a et b des réels quelconques. On a :

- (i) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
- (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
- (iii) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Proposition 1.3 (Factorisation d'un trinôme du second degré dans \mathbf{R}).

Soient le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- (i) Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

(ii) Si $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

(iii) Si $\Delta < 0$, le trinôme du second degré n'admet pas de racine dans \mathbf{R} .

PREUVE. On examine $ax^2 + bx$ comme le début d'un carré :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right). \end{aligned}$$

(i) Si $\Delta > 0$, il vient :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2} \right) \\ &= a \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

(ii) Si $\Delta = 0$, alors :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = a(x - x_0)^2.$$

(iii) Si $\Delta < 0$, on pose $\Delta = -\delta^2$ et on obtient :

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{\delta^2}{4a^2} \right).$$

Donc le trinôme du second degré ne s'annule jamais sur \mathbf{R} .

□

Corollaire (Relations entre coefficients et racines d'un trinôme).

Soient a, b et c des réels quelconques avec $a \neq 0$. Si le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 , éventuellement égales, dans \mathbf{R} , alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

PREUVE.

Il suffit de développer $a(x - x_1)(x - x_2)$ ou $a(x - x_0)^2$ selon la valeur de Δ , puis par identification, on déduit le résultat voulu. □

2 Puissances

Proposition 1.4 (Formulaire des puissances).

Soient x, y des réels quelconques et α, β des entiers quelconques. On a :

- (i) $x^0 = 1$;
- (iii) si $x \neq 0$, $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$;
- (v) si $y \neq 0$, $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$;
- (ii) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$;
- (iv) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;
- (vi) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

3 Fonctions circulaires - Trigonométrie

Définition 1.1 (Cercle trigonométrique).

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé **cercle trigonométrique**.

Définition 1.2 (Cercle trigonométrique).

Soit c un réel strictement positif. On dit que deux réels a et b sont **congrus modulo c** — que l'on notera $a \equiv b [c]$ — si leur différence est un multiple de c , c'est-à-dire si $a = b + kc$ avec k entier.

Remarque. Si a et b ne sont pas congrus modulo c , on note alors $a \not\equiv b [c]$.

Exemple 1.1. Si $t = 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, alors $t \equiv 0 [2\pi]$ et si $t \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$,

on écrit alors $t \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

Définition 1.3 (Fonctions sinus, cosinus et tangente).

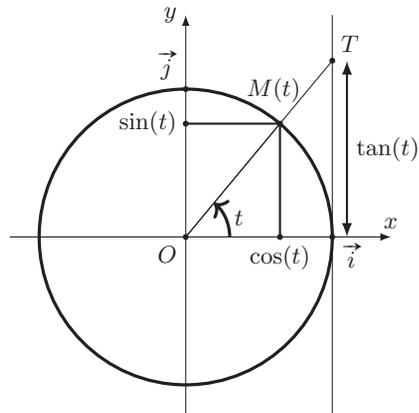
Pour tout réel t , on note $M(t)$ le point du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM(t)})$ soit égal à t .

- (i) On appelle **cosinus** du réel t l'abscisse de $M(t)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et **sinus** de ce réel l'ordonnée de $M(t)$.

On définit ainsi deux fonctions 2π -périodiques sur \mathbf{R} notées \cos et \sin .

- (ii) Pour un réel $t \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, la droite $OM(t)$ coupe la droite verticale d'équation $x = 1$ en un point T d'ordonnée $\tan(t)$.

On définit ainsi une fonction π -périodique sur $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$ notée \tan .



Remarque. On a pour tout réel t :

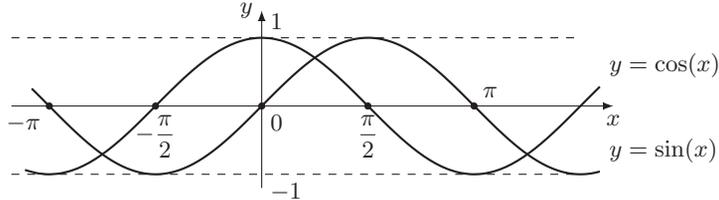
- $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.
- $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$.
- $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$.
- Si $t \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

Proposition 1.5.

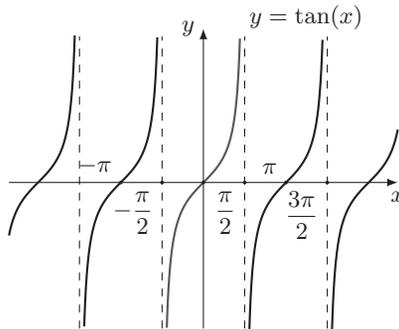
- (i) Les fonctions \sin et \cos sont continues et dérivables sur \mathbf{R} .
 (ii) Pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

- (iii) La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.



- (iv) La fonction **tangente** est définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
 (v) La fonction \tan est impaire et π -périodique.
 (vi) \tan est continue et dérivable sur tout intervalle où elle est définie, et pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.



Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Proposition 1.6 (Propriétés usuelles).

(i) On a pour tout réel t , $|\sin(t)| \leq |t|$.

(ii) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

PREUVE.

(i) Commençons par remarquer que, puisque la fonction sinus est bornée par -1 et 1, il suffit d'établir cette relation pour $|t| \leq 1$.

Or, la fonction $f : t \mapsto t - \sin(t)$ étant dérivable sur $[0; 1]$ avec $f'(t) = 1 - \cos(t) \geq 0$, on en déduit qu'elle est croissante sur $[0; 1]$, et comme $f(0) = 0$ on obtient $f(t) \geq 0$ sur cet intervalle, ce qui montre que :

$$\forall t \in [0; 1], \quad \sin(t) \leq t.$$

Il suffit alors de remarquer que $\sin t \geq 0$ pour $t \in [0; 1]$ pour pouvoir écrire :

$$\forall t \in [0; 1], \quad |\sin(t)| \leq |t|.$$

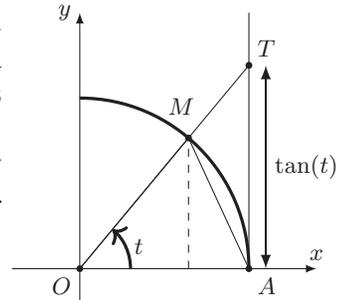
La fonction sinus étant impaire on en déduit alors :

$$\forall t \in [-1; 0], \quad \sin(-t) \leq (-t) \iff -\sin(t) \leq -t \iff |\sin(t)| \leq |t|.$$

On a ainsi monté la relation sur $[-1; 1]$, donc sur \mathbf{R} tout entier.

(ii) Considérons $t > 0$ et soient A le point de coordonnées $(1, 0)$, M le point du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ soit égal à t et T le point d'ordonnée $\tan(t)$.

Les triangles OMA et OAT sont d'aires égales respectivement à $\frac{\sin(t)}{2}$ et $\frac{\tan(t)}{2}$. D'autre part, l'aire du secteur angulaire AOM est égale à $\frac{t}{2}$.



La comparaison des trois aires donne :

$$\frac{\sin(t)}{2} \leq \frac{t}{2} \leq \frac{\tan(t)}{2} \iff \cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1.$$

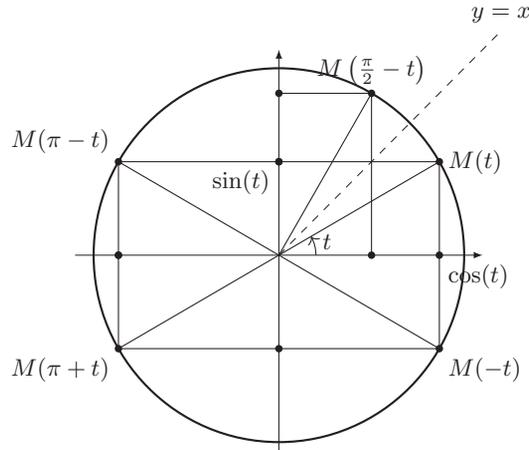
Par passage à la limite, on obtient donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$, résultat qui s'étend au cas ou $t < 0$ puisque $\sin(-t) = -\sin(t)$.

Au final, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. □

Proposition 1.7 (Symétries).

Soit un réel t , on a :

- (i) $\cos(-t) = \cos(t)$;
- (ii) $\sin(-t) = -\sin(t)$;
- (iii) $\cos(\pi + t) = -\cos(t)$;
- (iv) $\sin(\pi + t) = -\sin(t)$;
- (v) $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$;
- (vi) $\sin(\pi - t) = \sin(t)$;
- (vii) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$;
- (viii) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$.



Remarque. On a de même, sous réserve d'existence :

- $\tan(-t) = -\tan(t)$.
- $\tan(\pi - t) = -\tan(t)$.
- $\tan(\pi + t) = \tan(t)$.
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{\tan(t)}$.

Proposition 1.8 (Formules d'addition).

Soient a et b des réels.

- (i) $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
- (ii) $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;
- (iii) Sous conditions d'existence, on a :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

Remarque.

En remplaçant b par $-b$, on déduit ainsi les formules suivantes :

$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$ et

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

Proposition 1.9 (Formules de duplication).

Pour un réel a , on a :

- (i) $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$;
- (ii) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
- (iii) En cas d'existence :

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}.$$

Méthodes



Méthode 1 : Savoir mettre sous forme canonique

Pour transformer un trinôme du second degré du type $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ en la somme (ou la différence) de deux carrés, on peut procéder comme suit :

1. écrire $ax^2 + bx$ comme le début d'un carré :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

2. Si $c - \frac{b^2}{4a} \geq 0$, alors poser $d = \sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}$ pour obtenir :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + d^2.$$

3. Si $c - \frac{b^2}{4a} < 0$, alors poser $d = \sqrt{\frac{b^2}{4a} - c}$ pour obtenir :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - d^2.$$

Exemple 1.1

Montrer que pour tous réels x et t , on a $x^2 + 4x + \cos(t) + 5 \geq 0$.

Solution

Comme $1 + \cos(t)$ est toujours positif, on écrit :

$$x^2 + 4x + \cos(t) + 5 = (x + 2)^2 + 1 + \cos(t) \geq (x + 2)^2,$$

ce qui prouve bien que pour tous réels x et t , on a $x^2 + 4x + \cos(t) + 5 \geq 0$.



Méthode 2 : Savoir trouver la 2^e racine de $ax^2 + bx + c$

Si l'on connaît une racine x_1 du trinôme $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), alors pour trouver la deuxième racine x_2 (éventuellement égale à x_1), on peut utiliser l'une des deux relations du corollaire 1 de la page 10 :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarque. Cette méthode permet de gagner du temps quand une des racines est « évidente » car il est alors inutile de calculer le discriminant pour obtenir la deuxième racine du trinôme du second degré.

Exemple 1.2

Soient $t \in \mathbf{R}$ et $P(x) = 2x^2 + (\sin(t) - 2 \cos(t))x - \sin(t) \cos(t)$.
Calculer $P(\cos(t))$ et en déduire l'ensemble des racines de P .

Solution

On obtient immédiatement $P(\cos(t)) = 0$, ainsi $x_1 = \cos(t)$ est une racine de P et on en déduit que :

$$x_2 = -\frac{b}{a} - x_1 = \frac{-\sin(t) + 2 \cos(t)}{2} - \cos(t) = -\frac{\sin(t)}{2}$$

est également racine de P .

✓ Pour la détermination de la seconde racine, il est préférable d'utiliser la relation $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, car la deuxième relation $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ est inefficace lorsqu'une l'une des racines est nulle.

**Méthode 3 : Savoir utiliser l'expression conjuguée**

Pour écrire une fraction du type $F = \frac{\alpha}{a + \sqrt{b}}$ ou $F = \frac{\alpha}{a - \sqrt{b}}$ sous la forme $F = \frac{\beta}{c}$ avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, multiplier le numérateur et le dénominateur de F par $a - \sqrt{b}$ pour la première forme et $a + \sqrt{b}$ pour la seconde forme (appelée expression conjuguée du dénominateur) afin d'obtenir :

$$\frac{\alpha}{a + \sqrt{b}} = \frac{\alpha(a - \sqrt{b})}{a^2 - b} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{a - \sqrt{b}} = \frac{\alpha(a + \sqrt{b})}{a^2 - b}.$$

Exemple 1.3

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$.

Solution

On obtient $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + 1)}{1+x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} + 1 = 2$.

**Méthode 4 : Savoir résoudre un système linéaire de petite taille**

Pour cela, on peut suivre le plan suivant :

1. appliquer une ou plusieurs des opérations élémentaires sur les lignes du système : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$;
2. se ramener à un système avec un nombre décroissant d'inconnues ;
3. résoudre le système réduit obtenu en « remontant la résolution des équations ».